SECTION

NOUVELLES CONCEPTIONS ET CONTRIBUTIONS RÉCENTES

NEW CONCEPTS AND RECENT CONTRIBUTIONS

Présidents : Professeur J. KAMPE DE FERIET
Professeur L. S. G. KOVASZNAY

HEAT TRANSFER ACROSS TURBULENT INCOMPRESSIBLE BOUNDARY LAYERS [1]

J. KESTIN [2] and P. D. RICHARDSON [3]

SOMMAIRE

Le rapport contient une vue d'ensemble de l'état actuel des connaissances concernant le transfert de chaleur par convection forcée à travers les couches limites turbulentes mais incompressibles. Les fondements de la théorie semi-empirique sont examinés à partir des premiers principes, et les limitations de la théorie sont soigneusement notées. Les théories élémentaires sont décrites, et une esquisse de la théorie mathématique exacte de D. B. Spalding est donnée. Les cas limites des nombres de Prandtl très élevés, et très petits, sont discutés. Finalement une esquisse de la théorie du processus turbulent de Malkus est dessinée.

Une tentative consciencieuse a été faite pour clarifier toutes les hypothèses physiques, pour identifier les principaux problèmes fondamentaux qui requièrent l'attention, et pour indiquer les directions dans lesquelles la théorie semi-empirique peut être étendue.

SUMMARY

The report contains a survey of the present status of knowledge concerning the transfer of heat by forced convection across incompressible turbulent boundary layers. The foundations of the semi-empirical theory are examined from first principles and the limitations of the theory are carefully noted. Elementary theories are described and an outline of D. B. Spalding's mathematically exact theory is given. The limiting cases of very high and very low Prandtl numbers are discussed. Finally, an outline of W. V. R. Malkus' theory of turbulent processes is sketched.

A conscientious attempt has been made to clarify all physical assumptions, to identify the major fundamental problems which require attention and to indicate directions in which the semi-empirical theory can be extended.

1. The full text of the Report will be published in the International Journal of Heat & Mass Transfer. The present account is a slightly expanded version of the talk given at the Colloquium. A complete list of references will be given in that Journal.

2. Professor of Engineering, Brown University, Providence 12, Rhode Island.

3. Assistant Professor of Engineering, Brown University, Providence 12, Rhode Island.

1. General remarks

The complete text of the report prepared for the Colloquim has been distributed to all the participants and will be published *in extenso* elsewhere [1]. There is, therefore, no need to reproduce here the detailed considerations, because readers interested in the subject will be able to consult the relevant publications directly.

This account deals with the problem of heat transfer from a solid surface by a turbulent, incompressible and two-dimensional boundary layer in the absence of significant buoyancy forces. The first question which should be answered by this investigation is whether the study of heat transfer can contribute to our understanding of the mechanism of turbulence. The answer is negative in the present state of development. If we regard the turbulent boundary layer as a " black box " containing a mechanism [2], the study of heat transfer provides an input which is additional to the many that are normally studied. It can be stated that the empirical study of the resulting output has, so far, revealed little about the " mechanism " concealed in the " box ".

It follows that it is impossible to formulate a rational theory of heat transfer from the fundamental facts of turbulence. Apart from D. S. JOHNSON's[3] work, very few temperature-velocity correlations have been made so far. But, even if these were available in abundance, it is doubtful whether a rigorous theory of heat transfer could be built upon them any more than a rational theory of turbulent isothermal flows can be derived from the numerous velocity correlations now available. Two other possibilities of formulating a rational theory of turbulent convection are implied in the theory of laminar sublayers developed by J. STERNBERG [4] and in W. V. R. MALKUS' [5] theory of marginal stability. However, such developments, if at all possible, are still in the future [6]. Thus, if a complete theory is to be developed with available means, it is necessary to attempt to formulate a differential equation which can be valid under all or most circumstances of interest. This goal can be attained with the aid of several empirical facts, and the purpose of this note is to state them clearly and to sketch the derivations of the resulting equation. No serious objections can be raised against proceeding in this way, on condition that the empirical facts utilized in the derivation are either well established, or clearly formulated, so that they can be subjected to subsequent verification. As will be stated later, the latter is the case in the present problem. It is recalled that the fundamental equations of fluid mechanics, namely the Navier-Stokes equations, or, indeed, any equations of classical physics rest on empirical assumptions of this nature.

2. Central problem

The central problem of heat transfer across a two-dimensional turbulent boundary layer can be formulated as follows, Fig. 1. Given a cylindrical surface with a step-like

1. The International Journal of Heat and Mass Transfer.
2. The analogy was first suggested by Prof. S. CORRSIN.
3. *ASME Jl. Appl. Mech.*, **26**, 325-336 (1959).
4. Ballistic Research Laboratories, Report No. 1127, April 1961.
5. *Proc. Roy. Soc.*, A, **225**, 185-195, 196-212 (1954); *Jl. Fluid Mech.*, **1**, 521-539 (1956).
6. The current status of these theories has been discussed already in this Colloquium.

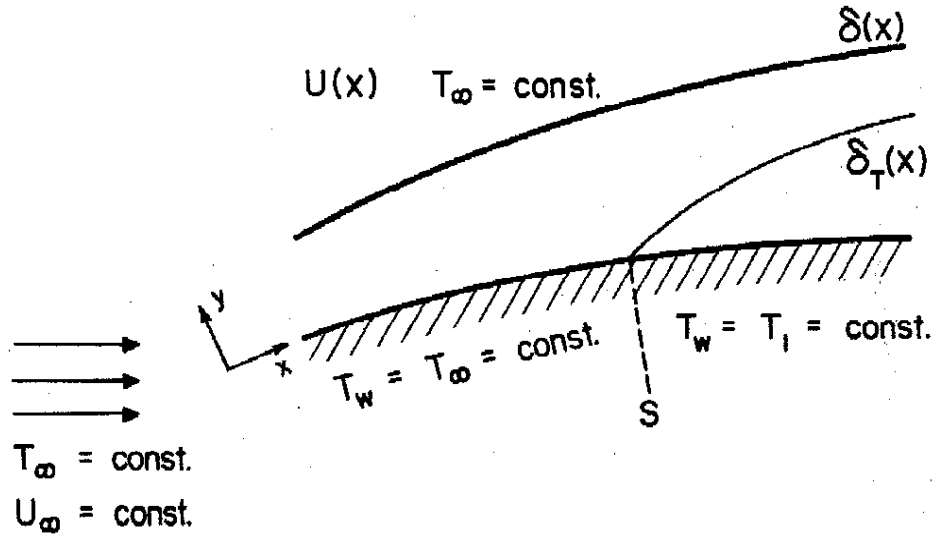


FIGURE 1
Central problem.

change in temperature over which there exists a velocity boundary layer $\delta(x)$ created by an external stream $U(x)$, and a thermal boundary layer $\delta_T(x)$ created by the difference θ_∞ between the wall temperature T_w and the free-stream temperature $T_\infty = \text{const}$, so that $\theta = T_w - T$, determine the resulting temperature field $\theta(x, y)$ and hence the heat flux

$$q_w = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = k\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_w. \tag{1}$$

Here k denotes the molecular conductivity of the fluid, because heat can be transmitted in the layer immediately adjacent to the wall by molecular conduction only. It is possible to formulate more general problems, involving, for example, a variable free-stream temperature $T_\infty(x)$. However, such more general problems have no practical importance. On the other hand, it can be stated that all other problems of importance are reducible to the one illustrated above. In particular, the problem in which the wall temperature T_w varies continuously in a prescribed manner $T_w(x)$ can be reduced to the above, since the final equations will turn out to be linear, and it will be possible to generate more complex solutions by superposition. It is noted that the temperature profile at the tsep S is prescribed, since then $\theta = 0$ at all values of y. In the case of a variable wall temperature, evidently, at S the temperature profile $\theta(y)$ will be a prescribed function of the transverse co-ordinate y.

A critical examination of the preceding problem clearly exhibits its boundary layer character, which leads to the anticipation that it will be governed by a partial differential equation of the parabolic type.

The imposition of a temperature difference between the solid wall and the fluid creates *two* new effects compared with those encountered in isothermal flows. First, it creates the *thermal boundary layer*, and secondly, it affects the thermodynamic and transport properties of the fluid (and thereby the fluid motion), since they all depend on temperature. In this short account we shall completely ignore the second effect by

assuming that all fluid properties are constant. It is well to remember, however, that in heat transfer it is necessary to deal with a wide variety of fluids whose properties span a very wide range of numerical values. For example, the Prandtl number, which determines the relative thicknesses of the velocity and thermal boundary layers, can vary over a ratio of $10^6:1$ when all fluids are considered, ranging from very small values for liquid metals, through nearly unity for gases, to very large values for oils. In general, the transport properties of the essentially compressible gases vary much less with temperature than do those of the essentially in compressible liquids. It is, further, important to realize that the effects of large variations in fluid properties (associated in particular with boundary layers in liquids transmitting heat at very high rates) have not received much attention.

3. Elementary theories. Similarity

Before giving the final outline of the formulation of the governing differential equation of turbulent convection, it is necessary to mention that current heat transfer calculations are not yet, generally, based on it. The pioneers who first recognized the boundary layer nature of heat transfer problems, notably L. PRANDTL [1], Sir Geoffrey TAYLOR [2] and Th. von KÁRMÁN [3] replaced the mathematical problem of formulating and then solving a differential equation by an *intuitive assumption,* namely that the ratio of shearing stress to heat flux remains constant across the boundary layer,

$$\frac{\tau}{q} = \text{const.} \tag{2}$$

A detailed analysis of the preceding assumption, given in the full account, reveals that it leads to acecptable results when the initial and boundary conditions for the flow field and the temperature field are similar. Hence it can be shown that the results of such approximate theories are restricted to fluids whose Prandtl number is close to unity and to flows with no significant pressure gradients. Such theories are, therefore, described as analogies. All more recent developments, including the extensive and, to a large extent, definitive workby R. DEISSLER [4], refined the details of the calculations by replacing a pieced-together statement for eddy viscosity (non-analytic expression) by one varying continuously across the boundary layer.

The problem of general similarity is best studied on the basis of the full Navier-Stokes equations, and it is easy to show that it can exist only on a flat plate when the velocity and temperature profiles are identical at some instant at some cross-section, when the temperature of the plate is constant, and provided that the temperature and velocity fluctuations $\frac{\partial \theta'}{\partial t}$ and $\frac{\partial u'}{\partial t}$ are similar. This leads to the well-known Reynolds analogy expressed by the equation

$$St = \frac{1}{2} c_f \tag{3}$$

1. *Physik. Zeitschr.*, **11**, 1072-1078 (1910).
2. *Brit. Adv. Comm. Aero. R. & M.*, 272 (1916).
3. *Trans. ASME*, **61**, 705-710 (1939).
4. NACA TN 2629 (1952); NACA TN 3145 (1954) : also Rep. 1210 (1955); NASA TR R-17 (1959).

where $St = \dfrac{q_w}{\rho c_p U_\infty \theta_\infty}$ is the local Stanton number, and $c_f = \dfrac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$ is the local skin friction coefficient.

4. D. B. Spalding's differential equation

The governing equation of turbulent convection was first formulated by D. B. Spalding [1]. In deriving it, use is made of the following facts :

(a) The most important part of the velocity profile which must be described accurately is that near the wall. Hence making use of the law of the wall will lead to acceptable results, except for very high Reynolds numbers or very low Prandtl numbers. The parabolic nature of the problem makes it necessary to provide a good description of the velocity profile only over that region over which the temperature varies rapidly; it has little effect when the temperature profile approaches closely to its asymptotic value.

(b) The law of the wall is only required to provide a statement of the variation of eddy viscosity; its accuracy must be greatest over that portion of the boundary layer in which most of the change in temperature takes place.

(c) The Boussinesq assumption [2], and the validity of the eddy viscosity and eddy conductivity concepts are accepted. This has the effect, essentially, of preserving in the turbulent energy equation the same form as is appropriate for laminar boundary layers. No other empirical facts are needed in the formulation.

It is clear from the above that it is advantageous to make use of the von Mises transformation [3]. This, together with the observation that the stream function ψ is a unique function of the reduced velocity u^+

$$\psi = \psi(u^+), \tag{4}$$

where

$$u^+ = \frac{u}{v^*}$$

and

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = U_\infty \sqrt{\frac{1}{2} c_f},$$

completes the mathematical facts needed in the derivation.

The resulting equation has the form

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon^+ u^+} \frac{\partial}{\partial u^+}\left(\frac{1}{Pr_e} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u^+}\right). \tag{5}$$

Here

$$x^+ = \int_{x_0}^{x} \frac{v^* dx}{\nu} \tag{5a}$$

1. Paper presented at ASME/I. Mech. E. Joint Heat Transfer Congress, Boulder, Colorado (1961).
2. See Schlichting, H., Boundary layer theory, McGraw-Hill, New York, 4th ed. (1960).
3. See Schlichting, H., Boundary layer theory, McGraw-Hill, N.Y., 4th ed. (1960); and also Goldstein, S., Modern developments in fluid dynamics, Oxford University Press (1938).

is a deformed length co-ordinate. Furthermore,

$$\varepsilon^+ = \frac{dy^+}{du^+} = 1 + \frac{\mu_t}{\mu} \tag{5b}$$

is a unique function of y^+ and hence of u^+ and is equal to the ratio of eddy viscosity μ_t to the molecular viscosity μ, augmented by unity. The effective Prandtl number

$$Pr_e = \frac{1 + \frac{\mu_t}{\mu}}{\frac{1}{Pr} + \frac{\mu_t}{\mu}\frac{1}{Pr_t}} \tag{5c}$$

depends only on the law of the wall $u^+(y^+)$, eqn. (5b), on the Prandtl number Pr, and on the turbulent Prandtl number Pr_t which represents the relation between the eddy viscosity and eddy conductivity.

In order to solve eqn. (5) for appropriate boundary conditions it is necessary to introduce an empirical statement of the variation of the turbulent Prandtl number across the boundary layer. It is customary to simplify the problem by *assuming*

$$Pr_t = 1 . \tag{6}$$

However, such a simplification is not always justified, and its true physical nature is only imperfectly understood. In fact, the importance of providing a reliable experimental investigation of the turbulent Prandtl number in order to make it possible to use eqn. (5) in practical problems cannot be over-emphasized. The present position with regard to this quantity is very unsatisfactory, as will be outlined later.

The fundamental equation must be solved numerically on a computer, and at present this can be done only if assumption (6), which appears to be adequate in practice, is accepted. Alternatively some other constant value may be stipulated. The details of the numerical calculation will be given elsewhere [1], but it may be noticed here that a successful scheme must take cognizance of the fact that eqn. (5) is singular at $y^+ = u^+ = 0$, since the coefficient $\frac{1}{\varepsilon^+ u^+}$ tends to infinity there. In the particular case when $Pr = Pr_t = 1$, the equation reduces to

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{u^+ \varepsilon^+}\frac{\partial^2\theta}{\partial u^{+2}} . \tag{7}$$

Its numerical solution for the boundary conditions

$$\begin{aligned} &\theta = 1 \text{ at } x^+ = 0 \quad \text{and all } u^+ > 0 \quad \text{i.e.} \quad y^+ > 0 \\ &\theta = 1 \text{ at } u^+ = \infty \quad \text{i.e.} \quad y^+ = \infty \text{ and all } x^+ > 0 \\ &\theta = 0 \text{ at } u^+ = 0 \quad \text{i.e.} \quad y^+ = 0 \text{ and all } x^+ > 0 \end{aligned}$$

is shown in Fig. 2. For the sake of simplicity only the gradient

$$-\left(\frac{\partial\theta}{\partial u^+}\right)_{w=0}$$

1. *Int. J. Heat and Mass Transf.* **5**, 143-152 (1962). See also paper presented by D. B. SPALDING at the ASME/E. Joint Heat Transfer Congress, Boulder, Colorado (1961), where an approximate method of integration is described.

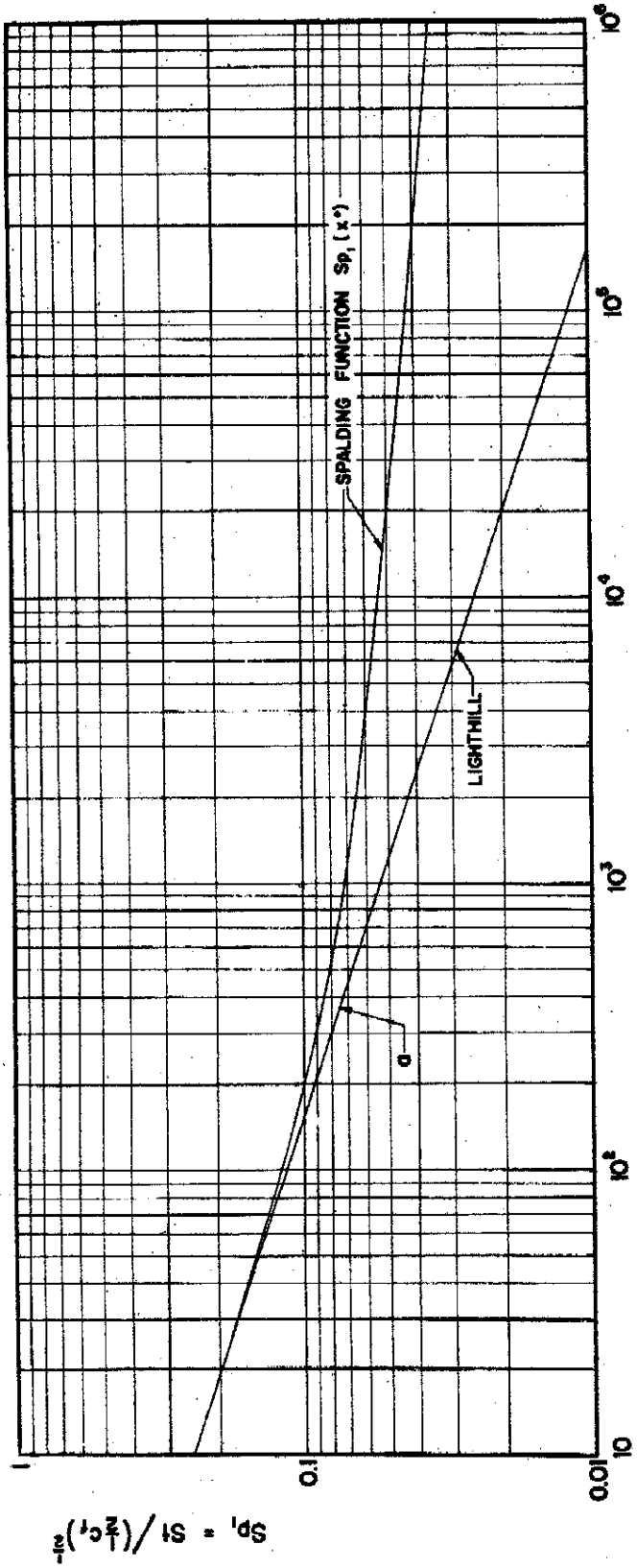


FIGURE 2
The Spalding function for $Pr = Pr_t = 1$.

has been plotted. This gradient, for which the designation of the Spalding function is suggested, can be shown to be directly related to the local Stanton number and to the local skin friction coefficient. In fact

$$-\left(\frac{\partial\theta}{\partial u^+}\right)_{w^+=0} = Sp(x^+, Pr) = \frac{St}{\left(\frac{1}{2}c_f\right)^{1/2}}, \tag{8}$$

and the graph gives values for $Pr = 1$, i. e. for $Sp\,(x^+, 1)$.

5. The turbulent Prandtl number

No unified and consistent picture regarding the turbulent Prandtl number has so far been revealed by research. In particular, it is not clear whether the turbulent Prandtl number is completely independant of the molecular Prandtl number, as implied in assumption (6). We now propose to give a brief account of these conflicting investigations,

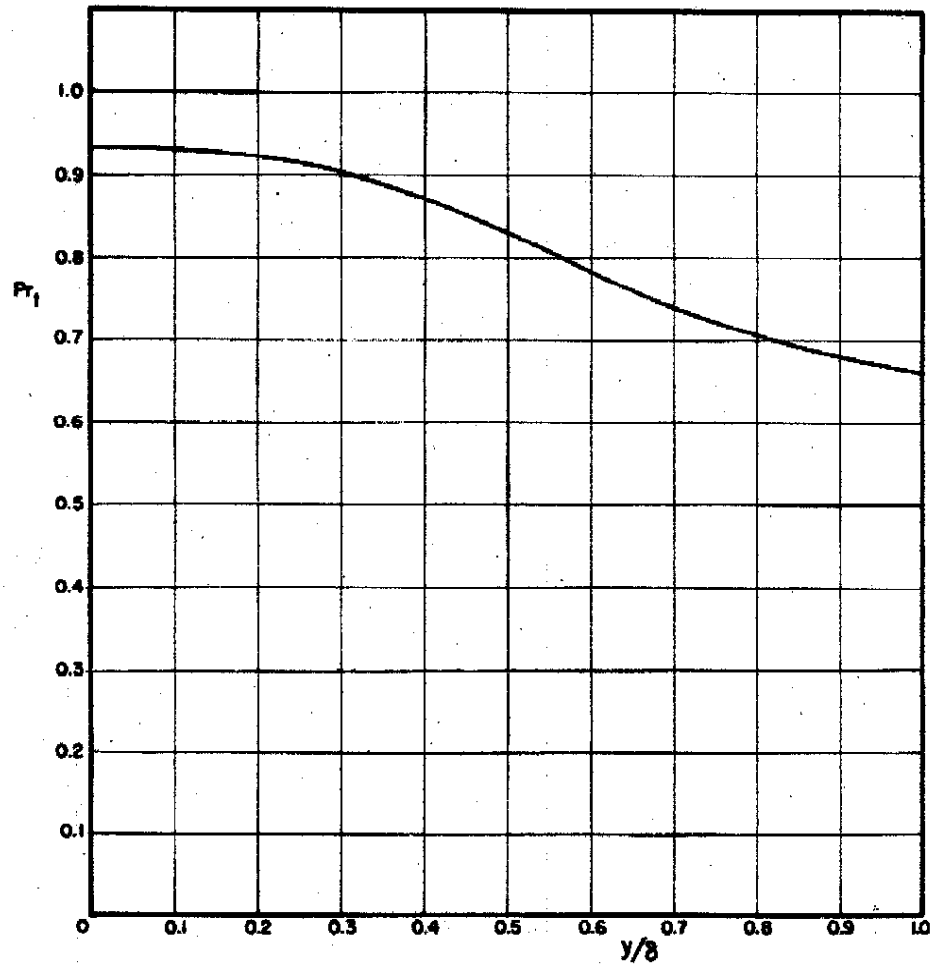


FIGURE 3
Variation of turbulent Prandtl number, Pr_t, with distance from wall, after H. Ludwieg.

beginning with that due to H. LUDWIEG [1] because it bears an aura of credibility, and provides a link to G. I. TAYLOR'S [2] vorticity transport theory. Measurements presently available are for turbulent heat transfer in gases, for which the molecular Prandtl number is close to unity. Whilst gases are generally more convenient experimentally than liquids, their use necessitates care if the small variations of apparent Prandtl number are to be clearly distinguishable from experimental uncertainties. This is especially important when evaluation of results involves differentiation of experimentally determined profiles.

H. LUDWIEG measured the variation with radius of the turbulent Prandtl number for air flowing in a pipe, as illustrated in Fig. 3. These measurements indicate that the turbulent Prandtl number varies smoothly and continuously from a value of about 0.7 near the pipe wall to a value approaching 0.5 at the centre of the pipe. Flow at the centre of a pipe does not include regions of wake flow, such as occur in boundary layers beyond the law-of-the-wall region. However, an extrapolation of H. LUDWIEG'S results on the basis of the reciprocal of distance from the wall shows that his measured values are symptotic to a turbulent Prandtl number of 0.5 at large distances from the wall, where the law of the wake would apply. This is in agreement with the values of 0.5 measured in the wake of a cylinder by A. FAGE and V. M. FAULKNER [3], and by H. REICHARDT in a free jet [4]. The values of 0.5 is also indicated by G. I. TAYLOR'S vorticity transport theory, and this gives support to the correctness of the values measured, and to the trend with position relative to the wall of H. LUDWIEG'S results.

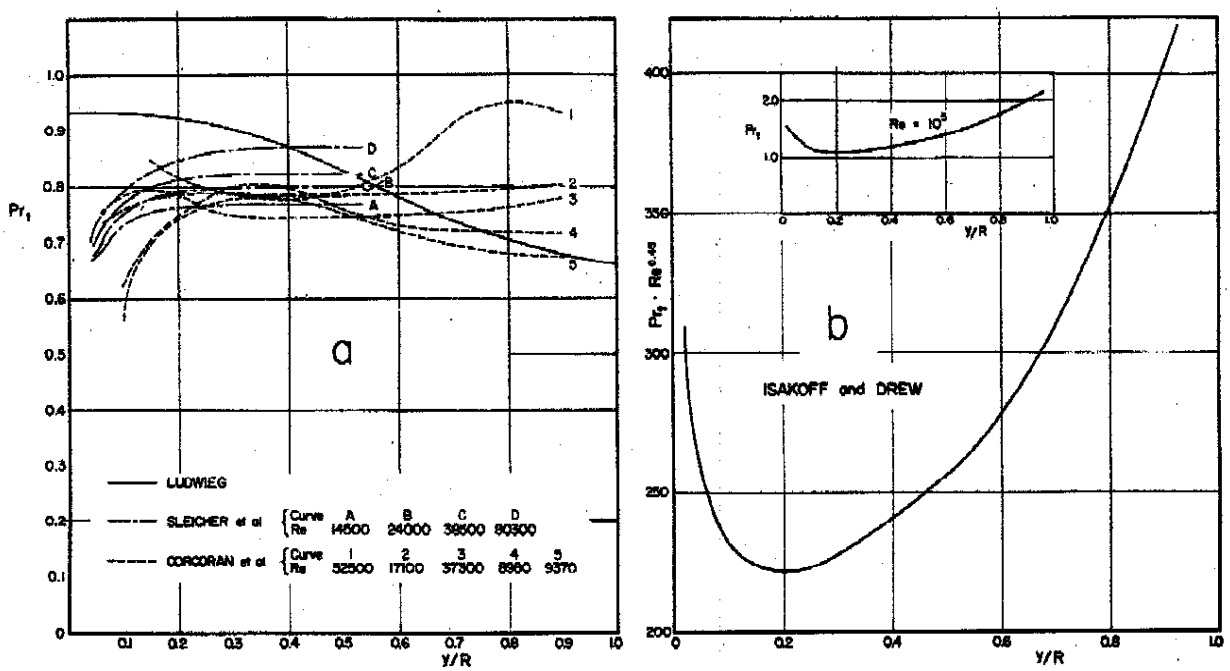


FIGURE 4
Variation of turbulent Prandtl number, Pr_t, with distance from wall. Comparison of results.

1. *Zeitschr. für Flugwiss*, **4**, 73-81 (1956).
2. *Proc. Roy. Soc.*, A, **135**, 685-702 (1932).
3. *Proc. Roy. Soc.*, A, **135**, 702-705 (1932).
4. ZAMM, **24**, 268 (1944).

Unfortunately the results of the remaining measurements do not agree with those of H. LUDWIEG, nor between themselves. These results, together with those of H. LUDWIEG, are shown in Fig. 4. From the diagram it can be seen that most measurements have trends opposite to H. LUDWIEG's, and there is great disagreement between them. It may be remarked that the uncertainties involved in the experiments are difficult to overcome, and it has been pointed out [1] that there is a distinct lack of agreement between local measurements and overall surface-flux measurements.

There have been several attempts to provide analyses of the variation of turbulent Prandtl number, but none of them has yet reached the point of obvious acceptance.

In conclusion, it is useful to note that the assumption $Pr_t = 1$ seems to be intimately connected with the spectral distribution of the velocity and temperature fluctuations. This is due to the fact that the assumption leads to the same conditions of similarity, or to the assumption that u' and θ' have identical spectral distributions, as shown in detail in the full account.

Acknowledgments

The authors wish to thank Professors A. FAVRE and H. SCHLICHTING who, by inviting them to deliver this lecture in Section IV, encouraged them to attempt this survey. Particular gratitude is due Prof. D. B. SPALDING who put at their disposal two unpublished papers without which the story would have no happy ending and who patiently answered many tedious letters. Professors L. N. PERSEN and R. A. DOBBINS were always willing to serve as interested sounding boards. For the complete Report, Prof. L. N. PERSEN checked the derivations in Secs. 14 and 15 and solved *de novo* M. J. LIGHTHILL's problem described in Sec. 17 [2]. Mr. T. B. SHEN helped with the calculations and the preparation of the drawings.

The work was performed under Contract AF 33(616) 7749 between the U. S. Air Force and Brown University and a grant from the National Science Foundation in Washington, D. C. enabled the authors to participate in the Colloquium.

1. MARTINELLI, R. C., *Trans. ASME*, **69**, 947-959 (1947).
2. *Int. J. Heat and Mass Transf.*, **5**, 355-371 (1962).

CORRÉLATIONS SPATIO-TEMPORELLES EN ÉCOULEMENTS TURBULENTS

par A. FAVRE [1], J. GAVIGLIO [2], R. DUMAS [3]

SOMMAIRE

L'étude des écoulements turbulents doit comporter l'examen de l'organisation statistique non seulement dans l'espace mais aussi dans le temps.

Les résultats de mesures concernent : en fluide incompressible les corrélations doubles et triples de vitesses, en fluide compressible les corrélations doubles de pression, à la paroi et hors des couches limites.

La corrélation spatio-temporelle permet de mettre en évidence l'hérédité dans les modes de turbulence rotationnel et entropique, et la propagation dans le mode acoustique.

SUMMARY

Turbulent flows studies must take into account their statistical properties, not only in space but also in time.

The results of the measurements deal with double and triple velocities correlations in the case of incompressible flows; and with double pressure correlations at the wall and out of the boundary layers in the case of incompressible flows.

The space-time correlations measurements show that the vorticity and the entropy modes are transferred by the mean-flow nearly like " frozen patterns », and that the sound wave mode is propagating with respect to the fluid.

Notations.

I. Introduction.

2.0. *Corrélations spatio-temporelles doubles et triples de vitesses, en écoulements de fluide incompressible.*

- 2.1. Autocorrélations dans divers écoulements.
- 2.2. Corrélations doubles en aval de grilles de turbulence.
- 2.3. Corrélations doubles dans diverses couches limites.
- 2.4. Corrélations triples dans une couche limite.

3.0. *Corrélations spatio-temporelles doubles de pression, en écoulements compressibles.*

- 3.1. Ecoulement subsonique.
- 3.2. Ecoulement supersonique.

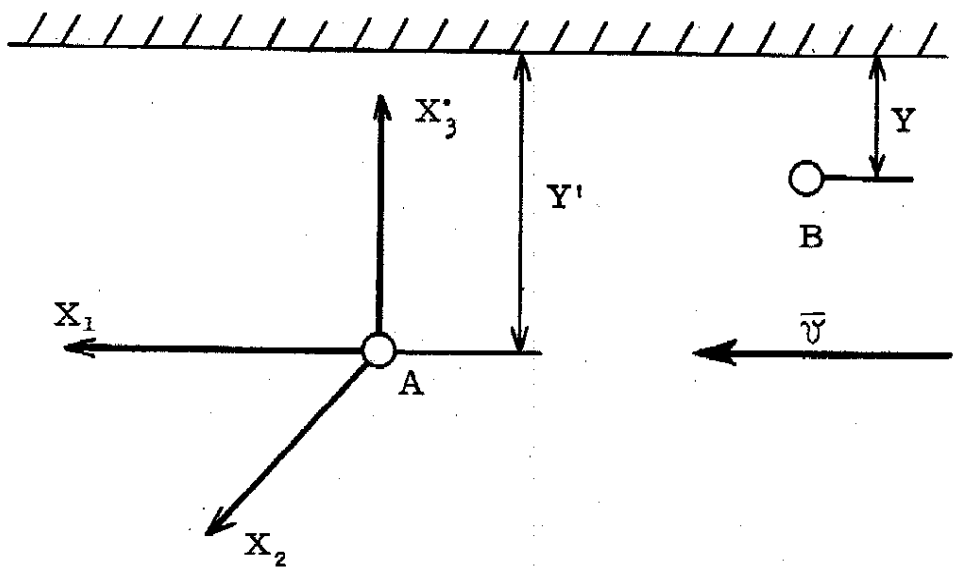
4.0. *Conclusions.*

Références.

1. Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.
2. Ingénieur, Chef de Groupe de Recherches à l'ONERA.
3. Maître Assistant à la Faculté des Sciences de Marseille.

NOTATIONS

Tièdre de référence A, X_1, X_2, X_3. Référence : point A défini dans chaque cas particulier. Point B : X_1, X_2, X_3.



α, β, γ indices de direction
y, y' distances à une paroi
z, z' distances au bord d'attaque
S, S' abcisses au long d'une ligne de coefficient de corrélation maximum
T, τ temps retard
v vitesse locale instantanée
$V = \overline{v}$ vitesse moyenne
$(v'_\alpha)_A$, $(v'_\alpha)_B$ fluctuation de vitesse dans la direction α en A, en B.

$$v_\alpha = v_\alpha + v'_\alpha = V_\alpha + v'_\alpha$$

V_c vitesse de transfert
p'_A, p'_B fluctuations de pression en A, en B.
δ épaisseur conventionnelle de couche limite ($V = 0{,}99\ V_{max}$)
$L = \int_0^\infty f \cdot dx_1$ longueur de corrélation
λ longueur de dissipation
M dimension de maille d'une grille de turbulence
$\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{max}$ nombre de Mach, nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite
$R_M = \frac{V_{max} M}{\nu}$, $R_\delta = \frac{V_{max}\,\delta}{\nu}$ $R_\lambda = \frac{\sqrt{v_1'^2}\,\lambda}{\nu}$ nombres de Reynolds
μ coefficient de viscosité

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ coefficient de viscosité cinématique

ρ masse spécifique

e, e' tensions électriques représentant $(v'_\alpha)_A$, $(v'_\alpha)_B$, en amont de filtres de bande

e_f, e'_f tensions e, e', après passage dans un filtre de bande

n fréquence

$H(n)$, $H'(n)$ répartition spectrale de l'énergie de la turbulence, correspondant à

$$\overline{e^2} = \int_0^\infty H(n)\, dn \qquad \overline{e'^2} = \int_0^\infty H'(n)\, dn$$

$A(n)$ réponse en énergie d'un filtre de bande, correspondant à

$$\overline{e_f^2} = \int_0^\infty A(n)\, H(n)\, dn$$

Corrélations spatio-temporelles doubles entre fluctuations de tensions :

$P(T, O) = \overline{e \cdot e(T)}$

$P'(T, O) = \overline{e' \cdot e'(T)}$

$P(T, X) = \overline{e \cdot e'(T)}$

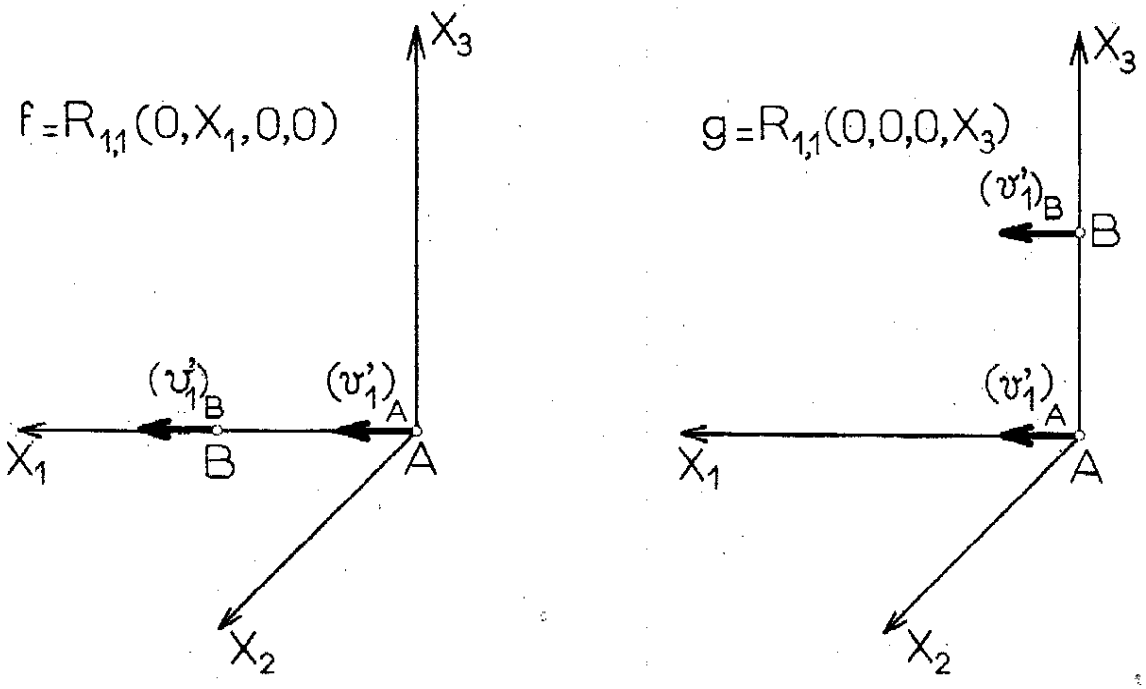
etc...

Coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles définis par rapport au point A

Vitesses

$$R_{\alpha\beta}(T, X_1, X_2, X_3) = \frac{\overline{(v'_\alpha)_A\, [v'_\beta(T, X_1, X_2, X_3)]_B}}{\sqrt{\overline{v'^2_\alpha}}\ \sqrt{\overline{v'^2_\beta}}}$$

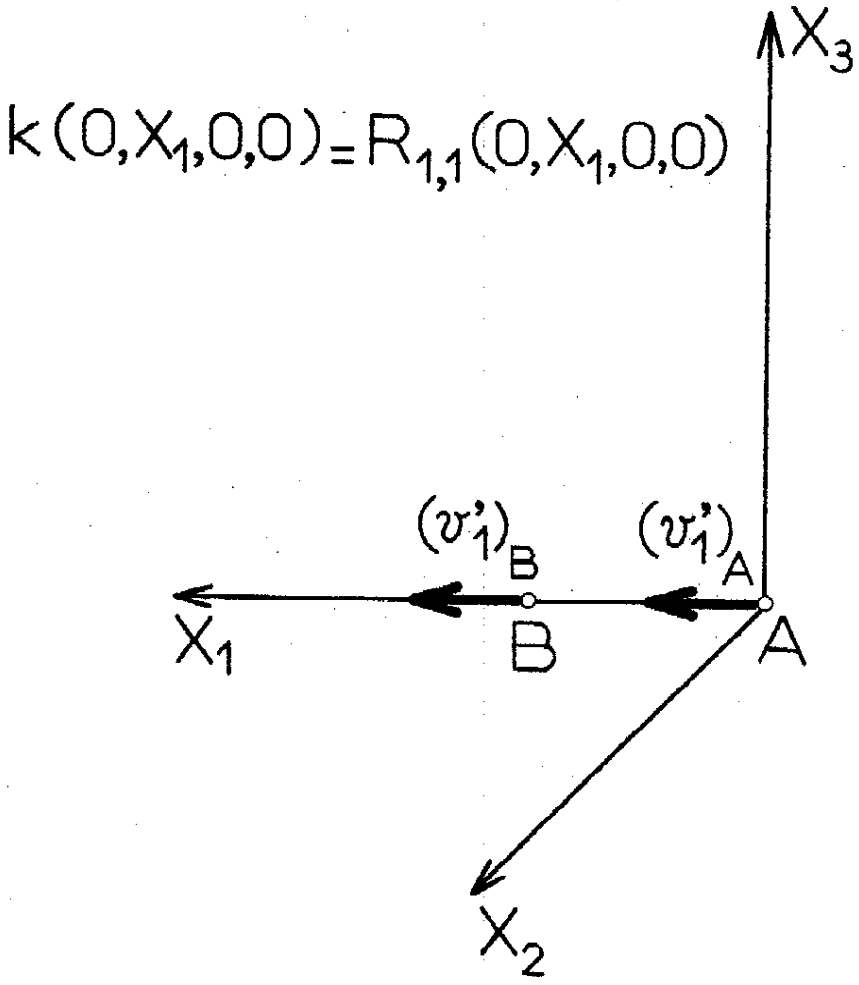
Exemples :



Coefficient de corrélation spatio-temporelle triple défini par rapport au point A

$$R_{\alpha\beta,\gamma}(T, X_1, X_2, X_3) = \frac{\overline{(v'_\alpha v'_\beta)_A [v'_\gamma (T, X_1, X_2, X_3)]_B}}{\sqrt{\overline{v_\alpha'^2}} \sqrt{\overline{v_\beta'^2}} \sqrt{\overline{v_\gamma'^2}}}$$

Exemple :



Le terme indiqué par l'appareil de mesure des corrélations spatio-temporelles doubles est :

$$r_{\alpha\alpha,\gamma}(T, X_1, X_2, X_3) = \frac{\overline{(v_\alpha'^2)_A [v'_\gamma (T, X_1, X_2, X_3]_B}}{\sqrt{\overline{v_\alpha'^4}} \sqrt{\overline{v_\gamma'^2}}}$$

$$R_{\alpha\alpha,\gamma} = r_{\alpha\alpha,\gamma} \sqrt{F}$$

$F = \dfrac{\overline{v_\alpha'^4}}{(\overline{v_\alpha'^2})^2}$ facteur d'applatissement.

$S = \dfrac{\overline{v_\alpha'^3}}{[\overline{v_\alpha'^2}]^{3/2}}$ facteur de dissymétrie.

1.0. Introduction

Les mouvements turbulents dépendent non seulement des variables d'espace, mais aussi du temps. Les équations et les conditions aux limites instantanées correspondantes définiraient le type d'écoulement.

La méthode qui consiste à prendre les moyennes de telles équations, non linéaires, en vue de l'étude de ces mouvements, fait apparaître des inconnues nouvelles, par exemple les corrélations doubles. Les équations aux corrélations doubles introduisent à leur tour des corrélations triples, et ainsi de suite, le système ne se ferme pas.

Même lorsqu'elle s'applique à des écoulements stationnaires en moyenne, l'étude doit donc comporter l'examen de l'organisation statistique non seulement dans l'espace, mais aussi dans le temps. Car il est souhaitable de pouvoir utiliser des propriétés physiques fondamentales basées sur l'organisation dans le temps, en vue de participer à la détermination de ces nouvelles inconnues : tensions de Reynolds, termes de transfert thermique, etc...

La corrélation spatio-temporelle apporte une contribution à cet examen.

Elle permetu notamment de suivre certains effets de la turbulence au long du mouvement moyen. Ainsi peuvent être mis en évidence des caractères héréditaires de la turbulence correspondant aux modes rotationnel et entropique (9).

Elle permet aussi de suivre la propagation des perturbations de pression du mode acoustique liées à la turbulence (9,15,26).

Des mesures de corrélations spatio-temporelles ont été effectuées dans divers écoulements turbulents.

En fluide incompressible elles concernent les corrélations doubles et triples de vitesses (2 à 8, 10 à 14, 16 à 22, 25) dans l'écoulement en aval de grilles de turbulence, et dans des couches limites se développant sur des plaques planes sans ou avec gradients de pression.

En fluide compressible, aux vitesses subsoniques et supersoniques elles concernent les corrélations doubles de pression, respectivement à la paroi (23) et hors de la couche limite (26).

2.0. Corrélations spatio-temporelles doubles et triples de vitesse en écoulements de fluide incompressible

Ces mesures ont été effectuées principalement à l'I.M.S.T., pour l'O.N.E.R.A.

Les vitesses moyennes V sont inférieures à 20 m/sec.

2.1. *Autocorrélations dans divers écoulements*

Dans le cas où les deux points A et B sont confondus, et les indices α et β égaux, on obtient le coefficient d'autocorrélation

$$R_{\alpha,\alpha}(T, 0, 0, 0) = \frac{\overline{(v'_\alpha)_A [v'_\alpha (T, 0, 0, 0)]_A}}{\overline{v'^2_\alpha}}$$

Les fig. 1 à 3, 8, 9, présentent divers résultats, pour $\alpha = 1$.

Fig. 1 à 3, pour $\frac{X_1}{M} = 0$; mesures en écoulement moyen rectiligne et uniforme, en aval d'une grille de turbulence; étude de l'influence de la bande de fréquence utilisée.

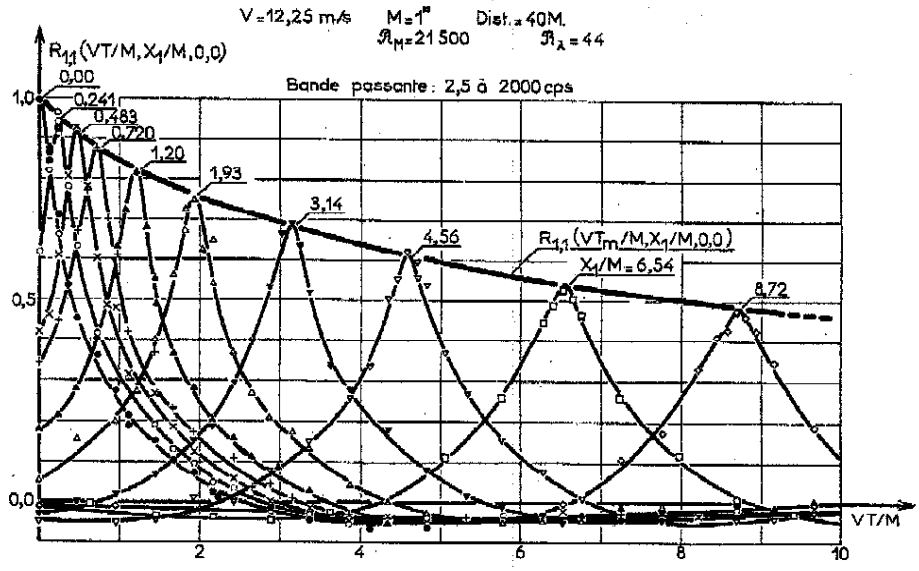


FIGURE 1a)
Coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles avec décalage X_1/M, en aval d'une grille.

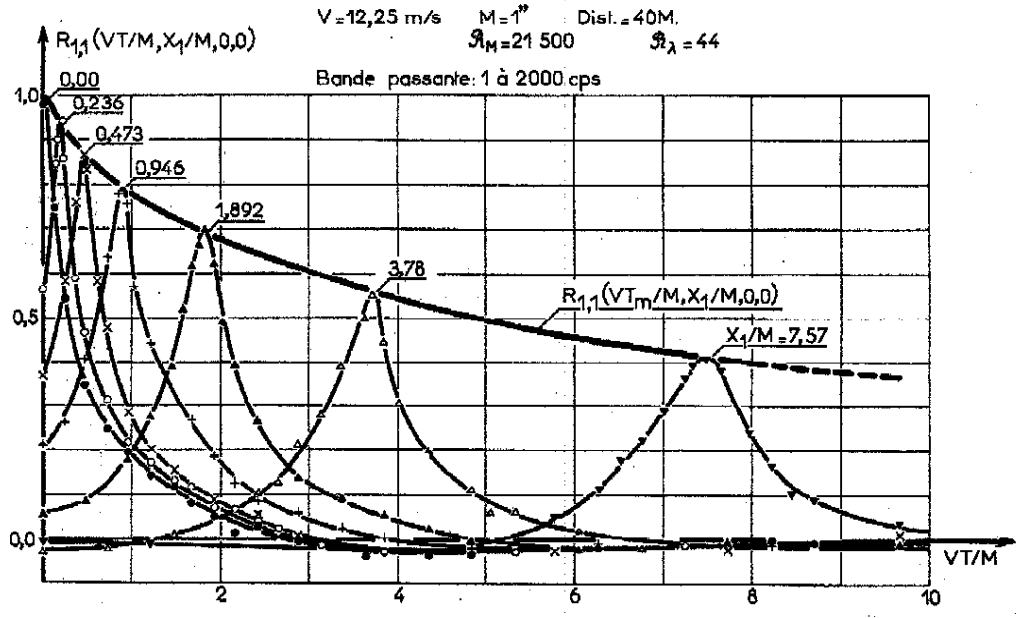


FIGURE 1b)
Coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles avec décalage X_1/M, en aval d'une grille.

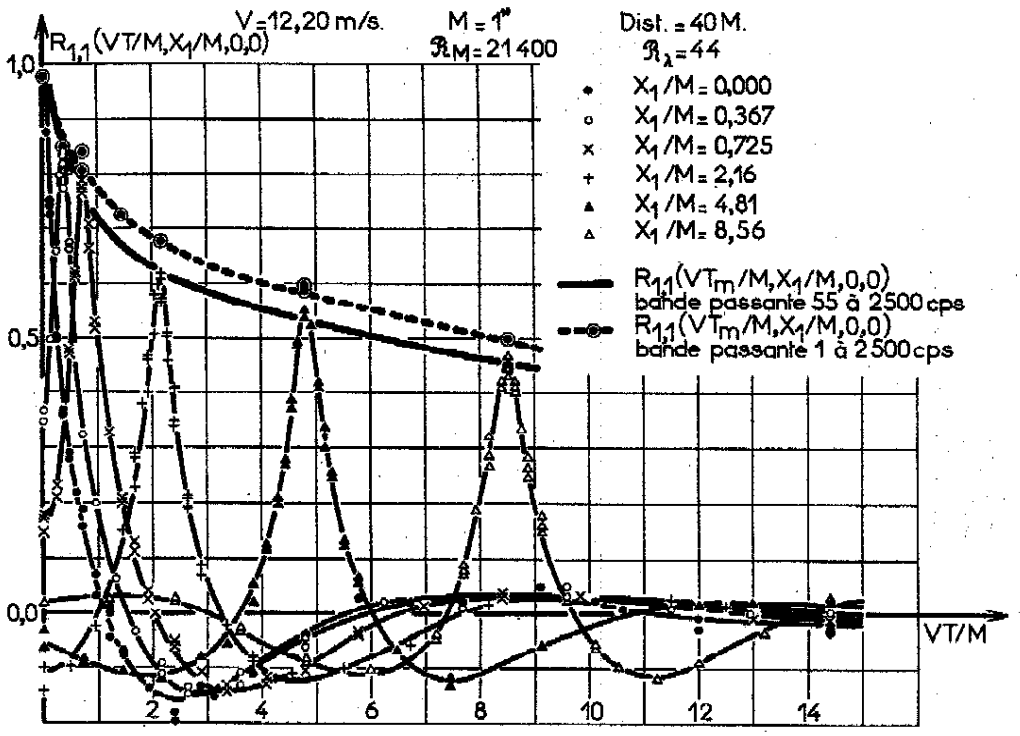


FIGURE 2
Coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles avec décalage X_1/M en aval d'une grille, influence de la bande passante.

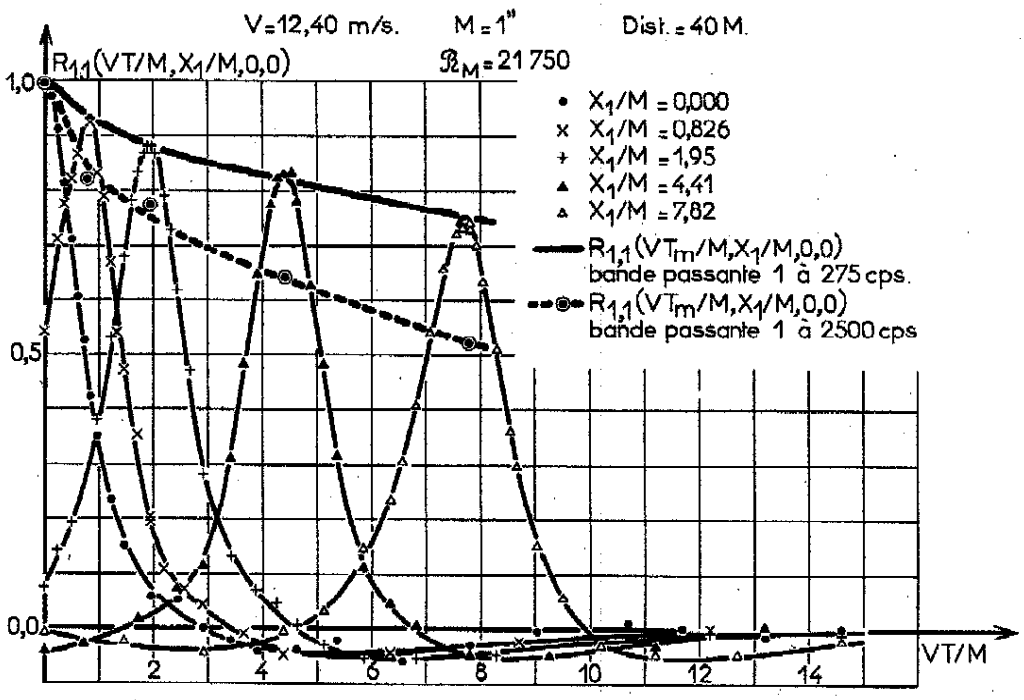


FIGURE 3
Coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles avec décalage X_1/M en aval d'une grille, influence de la bande passante.

Fig. 8, pour $\frac{X_1}{M} = 0$; mesures dans la couche limite sans gradient de pression, sur une plaque plane, la transition étant provoquée par la préturbulence d'une grille placée en amont (14, 16, 18, 20) ;

Fig. 9, mesures dans la couche limite, sans gradient de pression, sur une plaque plane, la transition étant provoquée soit par la turbulence d'une grille amont $\left(\frac{y'}{\delta} = 0{,}24\right)$ soit par des rugosités placées au bord d'attaque $\left(\frac{y'}{\delta} = 0{,}03 - 0{,}15 \text{ et } 0{,}77 \text{ et } \mathcal{R}_\delta = 27.900. \right.$ $\left. \mathcal{R}_\lambda \text{ atteint } 150 \text{ pour } \frac{y'}{\delta} = 0{,}03\right)$

2.1.1. Ces courbes permettent d'obtenir, par transformation de Fourier (1) la répartition spectrale de l'énergie turbulente. La vérification des mesures, par comparaison des courbes d'autocorrélation ainsi transformées, et des résultats obtenus à l'aide d'un analyseur spectral, est satisfaisante (3, 5, 6, 8, 12, 13).

2.1.2. D'après l'hypothèse de Taylor (1) si la vitesse de l'écoulement qui transporte les tourbillons est beaucoup plus élevée que la vitesse d'agitation, les courbes d'autocorrélation peuvent être assimilées aux courbes de corrélation avec décalage longitudinal d'espace, la correspondance étant $T = \frac{X_1}{V}$. Cette hypothèse est vérifiée dans l'écoulement libre en aval d'une grille (8, 12, 13, 17).

Elle semble pouvoir être étendue, en première approximation, à la couche limite, notamment à la région centrale (fig. 9, $\frac{y'}{\delta} = 0{,}24$).

En deuxième approximation des différences apparaissent, ayant des signes opposés de part et d'autre de cette zone. Ces résultats feront l'objet de vérifications. Sous ces réserves la vitesse de transfert du champ tourbillonnaire serait inférieure à la vitesse moyenne du fluide dans la zone extérieure de la couche limite. Elle serait supérieure au voisinage de la paroi. Ce phénomène pourrait être lié à l'existence d'un système particulier de tourbillons tournant dans le même sens (19, 24).

2.1.3. Le rayon de courbure de la courbe $R_{1,1}(T)$ pour $T = 0$ mesure le carré de la longueur λ de dissipation de l'énergie, avec l'hypothèse de Taylor.

2.2. *Corrélations doubles en aval de grilles de turbulence*

2.2.1. La fig. 1 donne des exemples de corrélations spatio-temporelles doubles avec décalages d'espace longitudinaux $R_{1,1}\left(\frac{VT}{M}, \frac{X_1}{M}, 0{,}0\right)$. Dans ce cas $R_\lambda = 44$.

Lorsque le retard $\frac{VT}{M}$ croit, la corrélation spatio-temporelle $R_{1,1}$ atteint un maximum pour un certain retard optimum. L'expérience montre que dans ce cas ce retard correspond au temps compensateur du mouvement d'ensemble,

$$T_m = \frac{X_1}{V}$$

La courbe joignant ces maxima donne le coefficient de corrélation spatio-temporelle avec retard optimum. Cette corrélation conserve des valeurs élevées même à des distances $\frac{X_1}{M}$ supérieures à celles qui suffisent à annuler pratiquement la corrélation correspondante dans l'espace.

2.2.2. Les résultats ci-dessous correspondent à une bande de fréquences s'étendant de 2,5 Hz à 2 KHz (Fig. 1*a*) et 1 Hz à 2 KHz (Fig. 1*b*)*.

La fig. 2 présente les résultats obtenus lorsque la bande de fréquences s'étend de 55 Hz à 2,5 K Hz, et compare la courbe joignant les maxima à celle obtenue au cours d'une série d'expériences dans l'intervalle 1 Hz à 2,5 KHz. La suppression des oscillations aux fréquences les plus basses, correspondant au quart de l'énergie environ, diminue la corrélation avec retard optimum.

La fig. 3 concerne les résultats obtenus lorsque la bande de fréquences est réduite à 1 - 275 Hz, et compare la courbe joignant les maxima à celle qui correspond à l'intervalle 1 Hz - 2,5 KHz, au cours d'une autre série d'expériences. La corrélation avec retard optimum est fortement accrue par la suppression des fréquences les plus élevées du spectre, correspondant à 30 % de l'énergie environ.

Le calcul (12) permet de prévoir l'influence de l'intervalle des fréquences utilisé, sur le coefficient de corrélation avec retard optimum.

Les corrélations respectivement mesurées en amont des filtres de bande, puis après filtrage, ont pour expressions :

$$\overline{e \cdot e'(T)} = P(T, X) = \frac{\overline{[e + e'(T)]^2 - [e - e'(T)]^2}}{4}$$

$$\overline{e_f \cdot e'_f(T)} = P_f(T, X) = \frac{\overline{[e_f + e'_f(T)]^2 - [e_f - e'_f(T)]^2}}{4}$$

Par définition des fonctions de répartition spectrale d'énergie $A(n)$ et $H(n)$;

$$\overline{[e_f \pm e_f(T)]^2} = \int_0^\infty A(n)\, H_\pm(n)\, dn$$

$H_\pm(n)$ s'exprime en fonction du produit d'autocorrélation

$$P_\pm(\tau) = \overline{[e \pm e'(T)]\,[e(\tau) \pm e'(T + \tau)]}$$

par la relation de Fourier :

$$P_\pm(n) = 4 \int_0^\infty P_\pm(\tau) \cos 2\pi n \tau\, d\tau$$

Developpons l'expression de $P_\pm(\tau)$

$$P_\pm(\tau) = P(\tau, 0) + P'(\tau, 0) \pm [P(T + \tau, X) + P(T - \tau, X)]$$

Ainsi

$$P_f(T, X) = \frac{1}{4}\left[\int_0^\infty A(n)\, H_+(n)\, dn - \int_0^\infty A(n)\, H(n)\, dn\right]$$

$$P_f(T, X) = \int_0^\infty \left[A(n) \int_0^\infty P_+(\tau) \cos 2\pi n \tau\, d\tau\right] dn - \int_0^\infty \left[A(n) \int_0^\infty P(\tau) \cos 2\pi n \tau\, d\tau\right.$$

* Les différences entre les divers résultats paraissant dûes aux erreurs de mesures que la technique actuelle réduirait.

soit en définitive :

$$P_f(T, X) = 2\int_0^\infty \left\{ A(n) \int_0^\infty [P(T+\tau, X) + P(T-\tau, X)] \cos 2\pi n \tau \, d\tau \right\} dn$$

Le coefficient de corrélation correspondant est

$$R_f(T, X) = \frac{2\int_0^\infty \left\{ A(n) \int_0^\infty [P(T+\tau, X) + P(T-\tau, X)] \cos 2\pi n \tau \, d\tau \right\} dn}{\sqrt{\int_0^\infty A(n) H(n) \, dn \int_0^\infty A(n) H'(n) \, dn}}$$

La vérification expérimentale est assez satisfaisante.

La courbe obtenue par des mesures effectuées dans l'intervalle de fréquences 10 à 1 250 Hz (coïncidant pratiquement avec celle obtenue dans l'intervalle 2,5 à 2 000 Hz, fig. 1*a*) est comparée (Fig. 4) aux courbes calculées par la méthode précitée, correspondant aux bandes 140-1 250 Hz et 10-140 Hz. La fréquence de 140 Hz est égale à $\frac{V}{2\pi L}$ L étant la longueur de corrélation.

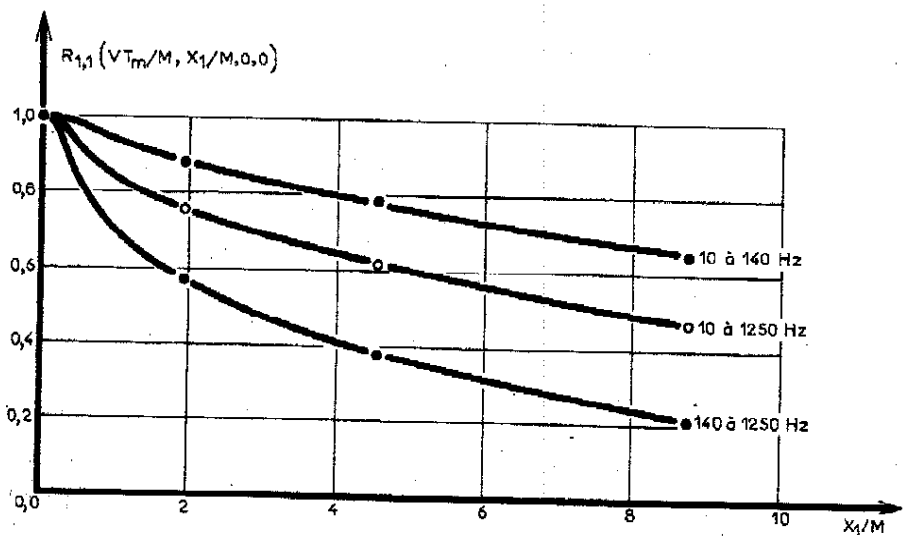


FIGURE 4
Effets de la bande de fréquences sur les corrélations spatio-temporelles avec retard optimum.

La première courbe correspond aux fluctuations à moyennes et grandes fréquences, portant environ 50 % de l'énergie et responsables de la dissipation visqueuse; la corrélation est fortement diminuée dans ce cas. La seconde correspond aux fluctuations à basses fréquences portant environ 50 % de l'énergie, qui participent aux effets de la viscosité dans la proportion de 1 % seulement; la corrélation est fortement augmentée dans ce cas.

La longue conservation du coefficient de corrélation au cours du mouvement moyen est donc attribuable aux tourbillons à grande échelle. Toutefois, une diminution est constatée, qui serait principalement l'effet de la diffusion turbulente, liée au rayon de courbure à l'origine.

2.2.3. La Fig. 5 présente les isocorrélations spatio-temporelles avec retard compensateur du mouvement d'ensemble, dans le cas correspondant à celui de la fig. 3 d'un décalage d'espace longitudinal. En première approximation, les courbes sont elliptiques, les rapports d'axes varient de 0,05 à 0,03 lorsque $R_{1,1}$ varie de 0,9 à 0,4. L'inclinaison de ces axes confirme que le temps optimum T_m est égal au temps compensateur $\frac{X_1}{V}$ du mouvement d'ensemble.

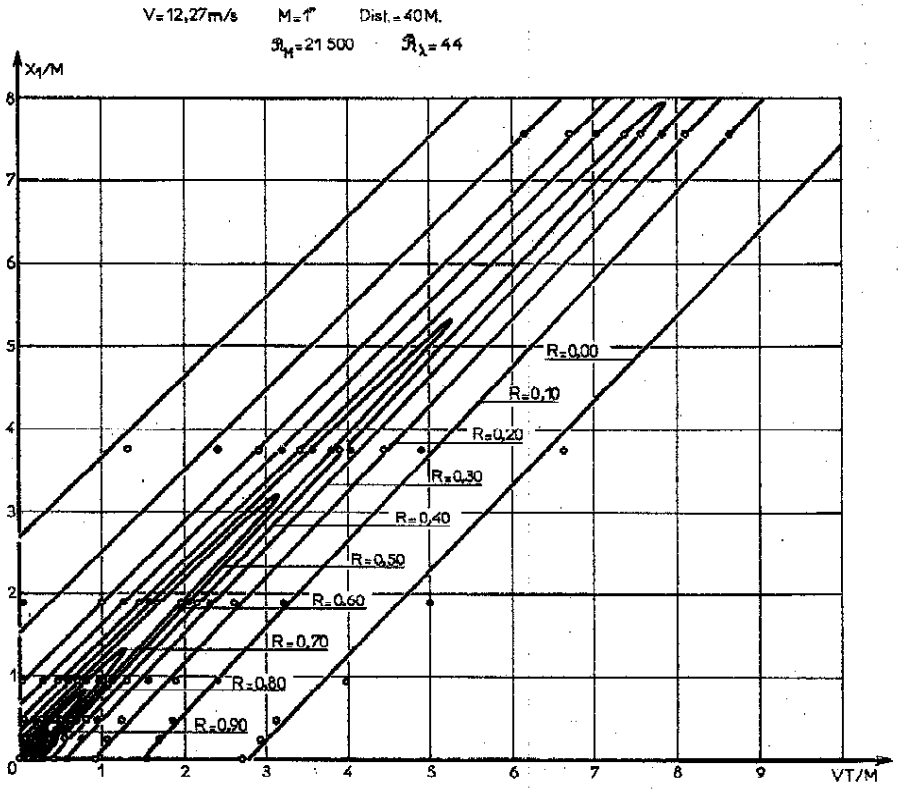


FIGURE 5
Isocoefficients de corrélations spatio-temporelles doubles avec décalage X_1/M et retard optimum $T = T_m$ en aval d'une grille. Composantes $\alpha = 1$.

2.2.4. Dans le cas (8,13) où les fluctuations de vitesses sont considérées en deux points décalés dans l'espace transversalement, $\left(\frac{X_1}{M} = 0\right)$, le retard optimum mesuré est nul. Ce résultat apparaît sur la fig. 6. Les courbes $R_{1,1}\left(\frac{VT}{M}, 0, 0, \frac{X_3}{M}\right)$ sont elliptiques, le rapport d'axes varie peu en fonction de $R_{1,1}$.

2.2.5. Lorsque le décalage d'espace est à la fois longitudinal et transversal (18,13), le temps optimum est aussi égal au temps compensateur de la translation d'ensemble. Les courbes d'isocorrélations spatio-temporelles avec retard optimum, (fig. 7) présentent un grand allongement en X_1. Ceci notamment confirme la longue conservation de la corrélation en suivant le mouvement d'ensemble.

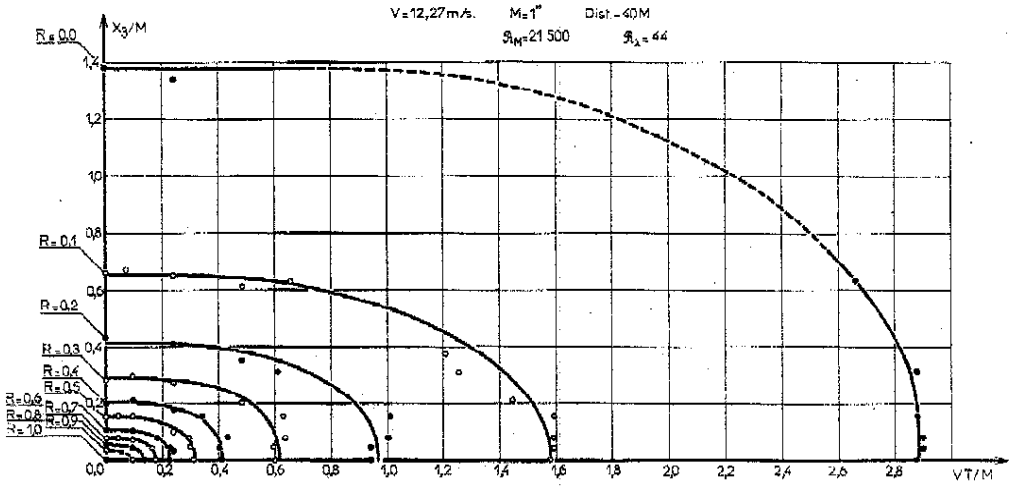


FIGURE 6
Isocoefficients de corrélations spatio-temporelles doubles avec décalage X_3/M et retard VT/M en aval d'une grille. Composantes $\alpha = 1$.

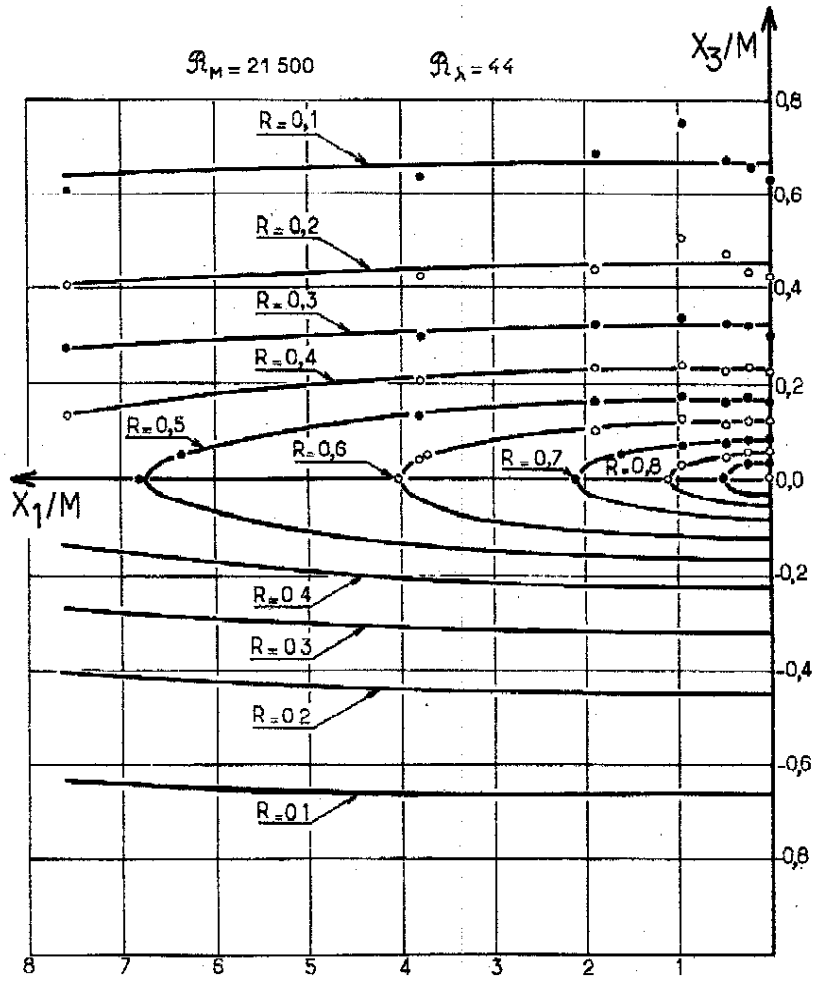


FIGURE 7
Isocoefficients de corrélations spatio-temporelles doubles avec décalage X_1/M et X_3/M, et retard $T_m = X_1/V$ en aval d'une grille. Composantes $\alpha = 1$.
$V = 12{,}27$ m/sec. $M = 1''$. Dist. 40 M.

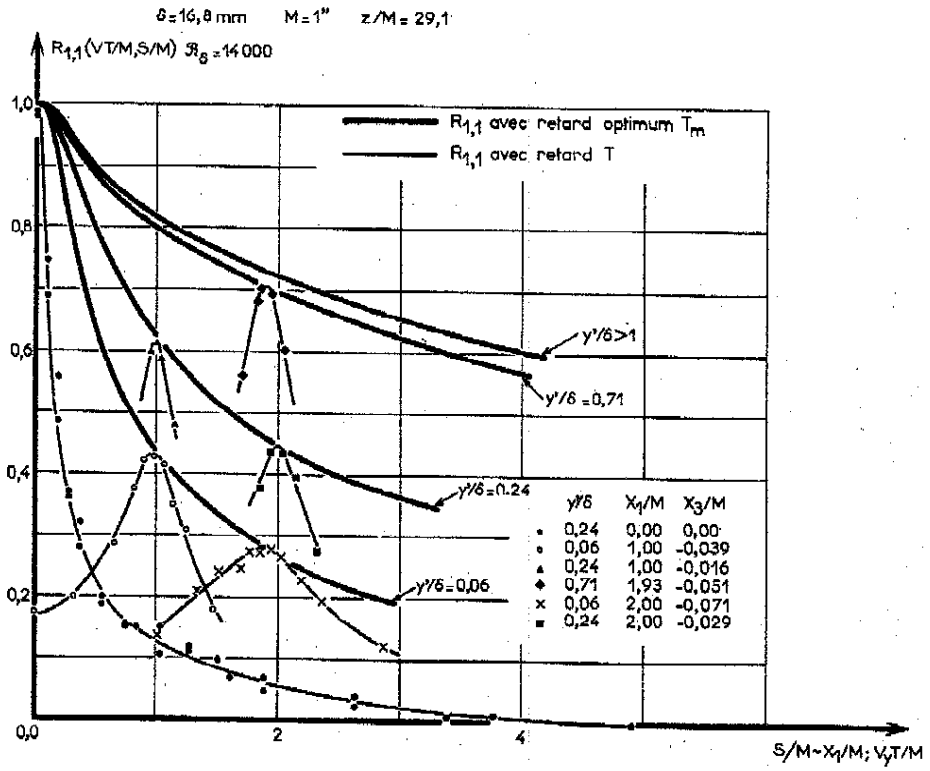


FIGURE 8
Coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles au long de la ligne S de corrélation maximum dans une couche limite, en aval d'une grille.

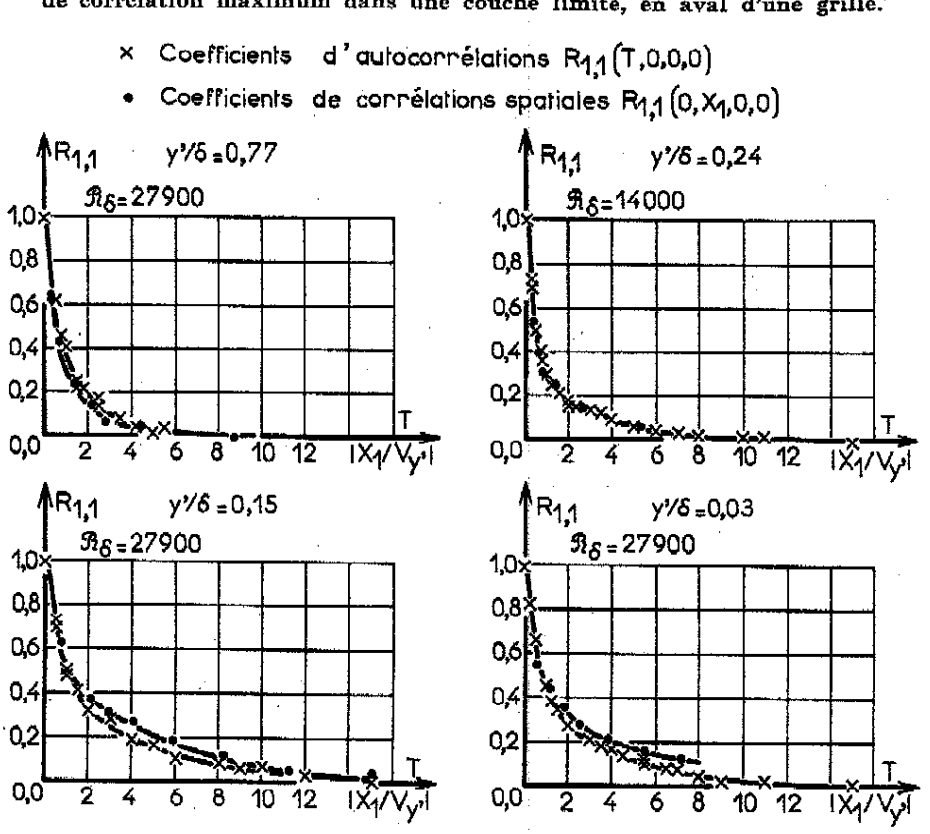


FIGURE 9
Mesures dans la couche limite d'une plaque plane.

Il serait utile de développer les mesures pour étudier ces résultats en fonction du nombre de Reynolds de la turbulence.

2.3. *Corrélations doubles dans diverses couches limites.*

2.3.1. Les résultats présentés par les fig. 8 à 18 concernent des couches limites peu différentes, sans gradient de pression, se développant sur plaques planes. La transition est provoquée par divers procédés :

Fig. 8 par la préturbulence d'une grille placée en amont (14, 16, 17).

Fig. 9 lorsque $\frac{y}{\delta} = 0{,}24$, par la même préturbulence; et lorsque $\frac{y}{\delta} = 0{,}03 - 0{,}15$ et 0,77 par des rugosités placées au bord d'attaque (16 à 18, 20).

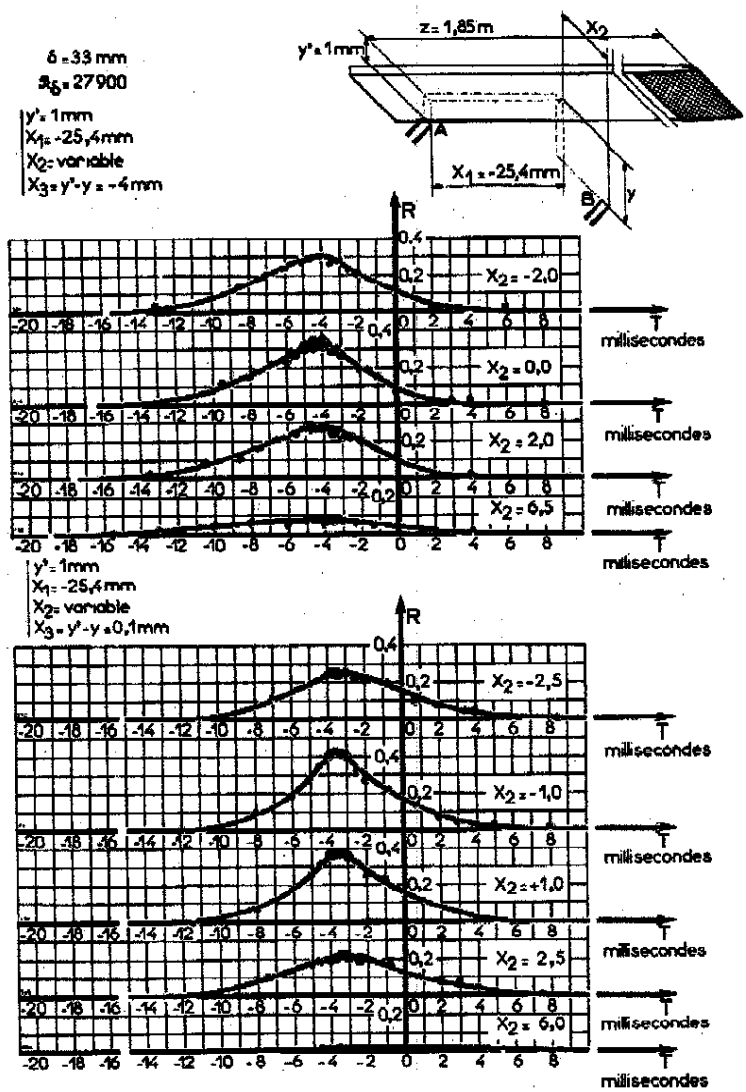


Figure 10
Exemples de coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles.
Composantes $\alpha = 1$.

Fig. 10 à 17 par des rugosités placées au bord d'attaque;
Fig. 18 sans artifice, l'incidence du bord d'attaque étant convenablement réglée (25).

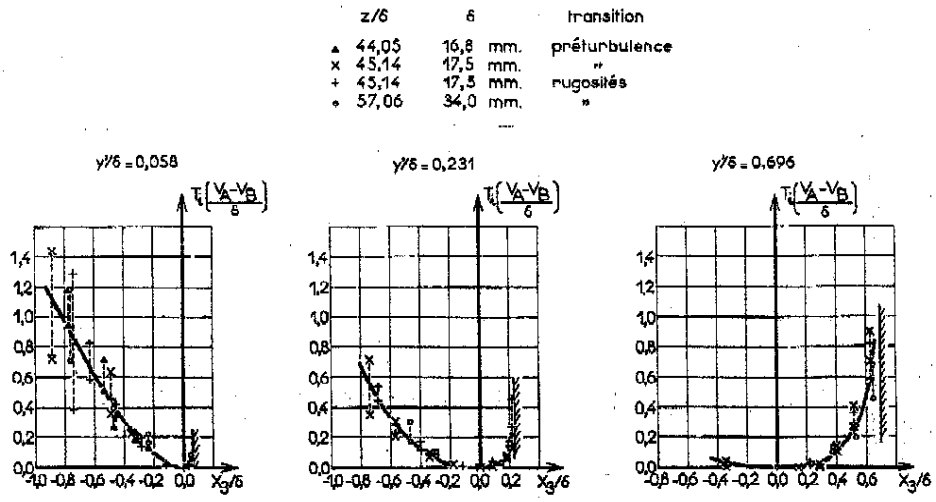


FIGURE 11
Retard optimum T_1 pour les coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles de vitesses dans la couche limite d'une plaque plane. Composantes $\alpha = 1$.

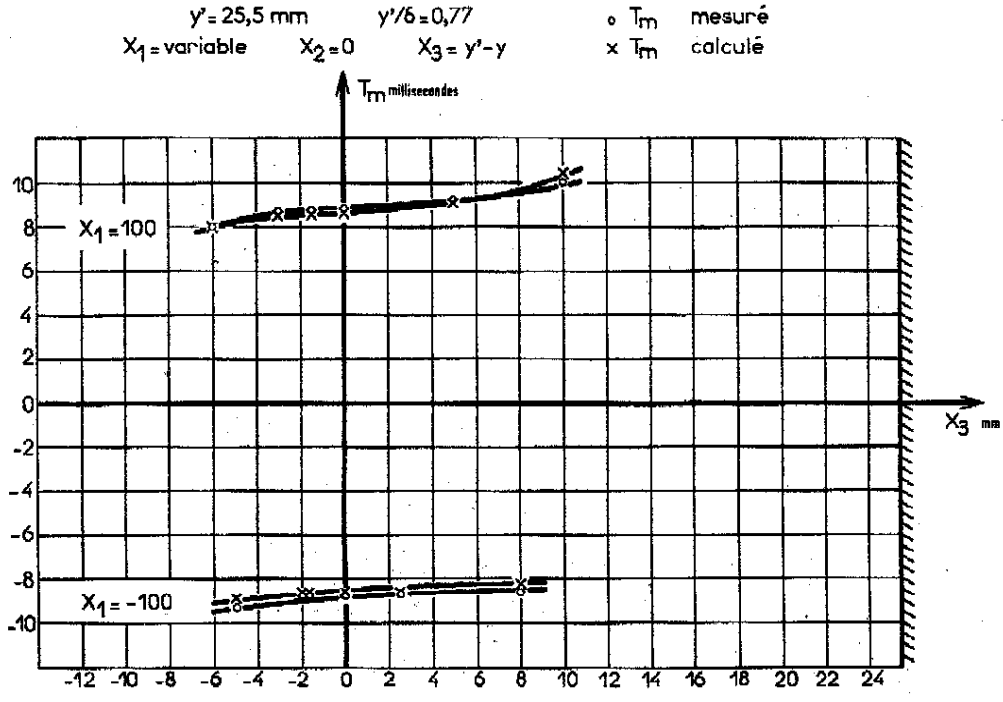


FIGURE 12
Comparaison du retard optimum mesure et du retard total $T_1 + \frac{2X_1}{V_A + V_B}$ pour les mesures de coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles de vitesses dans la couche limite d'une plaque plane. Composantes $\alpha = 1$.

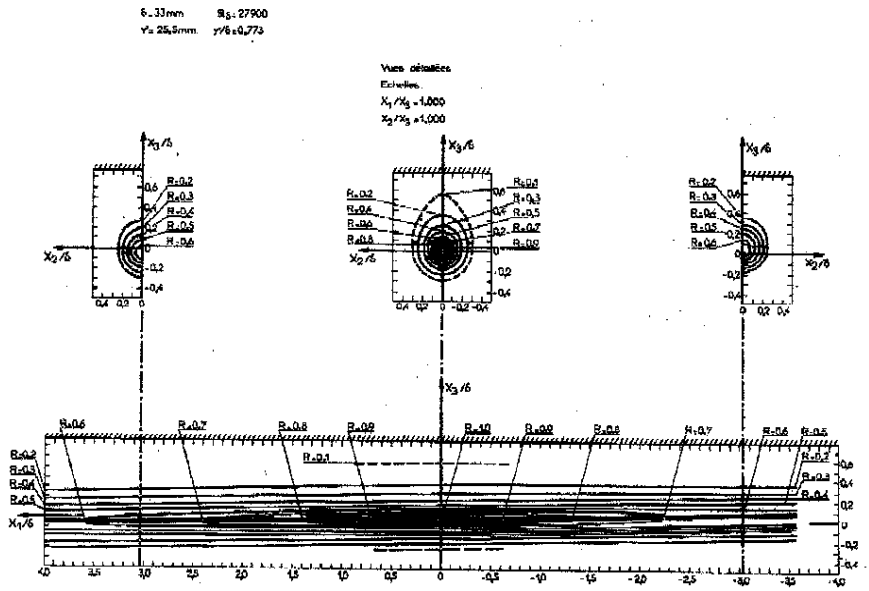


FIGURE 13
Surfaces d'isocoefficients de corrélations spatio-temporelles doubles avec retard optimum dans la couche limite d'une plaque plane. Composantes $\alpha = 1$.

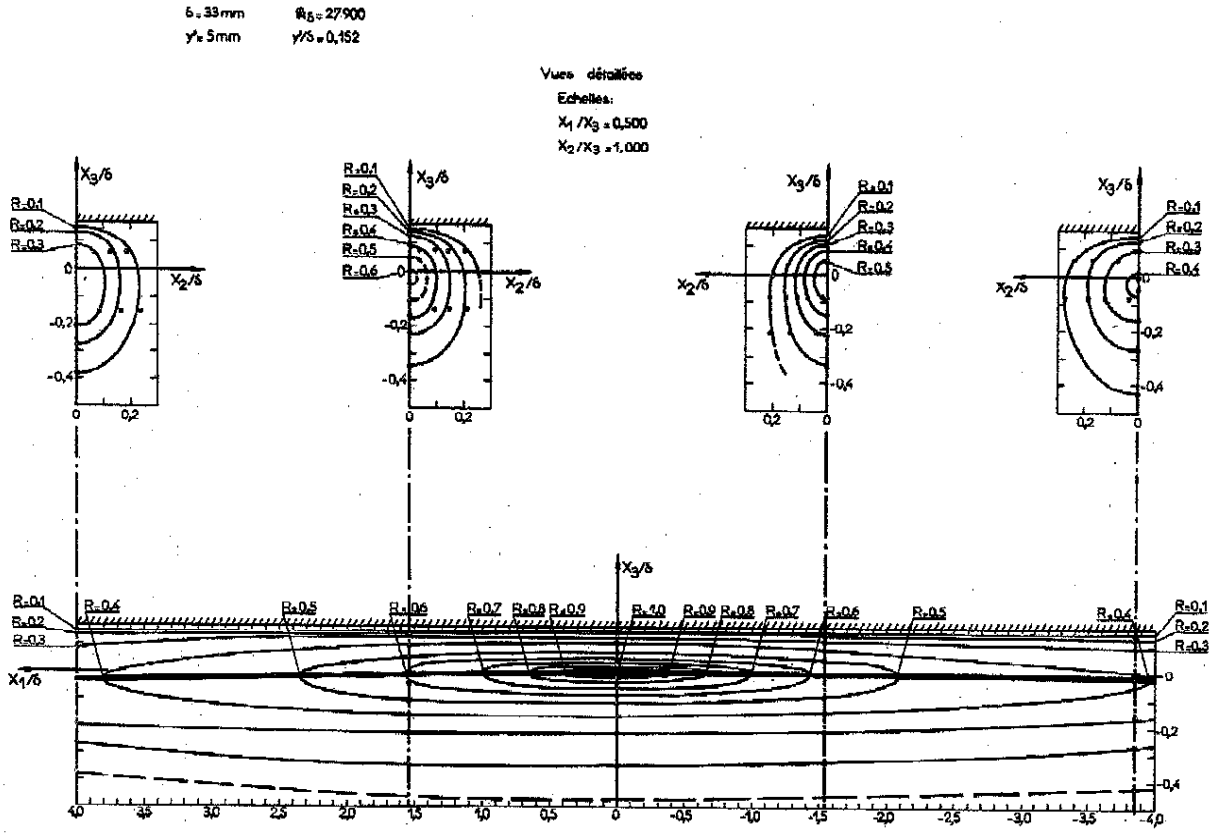


FIGURE 14
Surfaces d'isocoefficients de corrélations spatio-temporelles doubles avec retard optimum dans la couche limite d'une plaque plane. Composantes $\alpha = 1$.

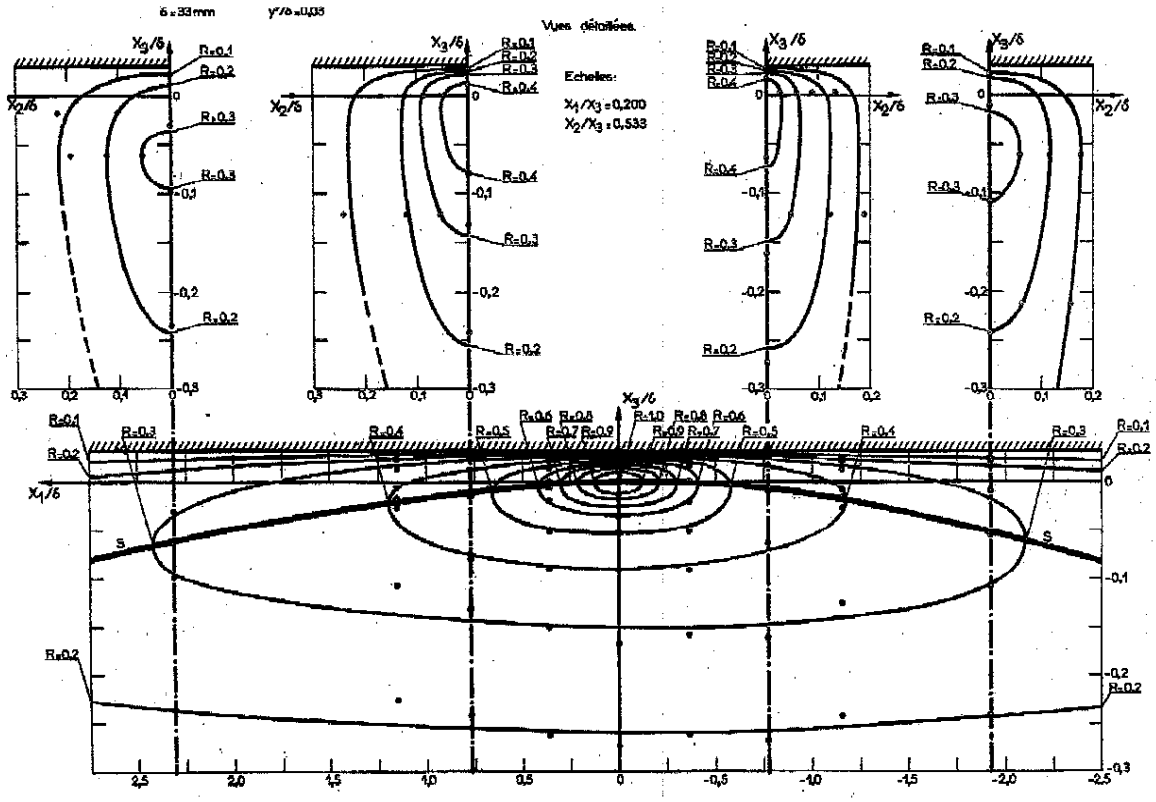


FIGURE 15
Surfaces d'isocoefficients de corrélations spatio-temporelles doubles avec retard optimum dans la couche limite d'une plaque plane. Composantes $\alpha = 1$.

Dans tous les cas, la corrélation $R_{\alpha,\beta}$ varie avec T et atteint un maximum pour une valeur T_m du retard (fig. 8, 10).

2.3.2. *Retard optimum.*

2.3.2.1. Lorsque les points A et B sont disposés sur une ligne droite orthogonale à la paroi plane, la corrélation mesurée

$$R_{1,1}\left(\frac{VT}{\delta}, 0, 0, \frac{X_3}{\delta}\right)$$

est maximum pour une valeur particulière $T_m = T_i$ du retard optimum, différente de zéro : ce retard était nul dans la turbulence en aval d'une grille (2.2.4) pour les décalages orthogonaux à la vitesse générale. La fig. 11 montre que (14, 21) pour une distance z au bord d'attaque donnée, le retard T_i dépend de la position y' du point A et de $\frac{X_3}{\delta}$. Il change de signe avec $\frac{X_3}{\delta}$, c'est-à-dire en même temps que la différence des vitesses $V_A - V_B$ enA et en B. Compte tenu de la précision des mesures de T_i aucun effet du mode de transition n'est décelé. Lorsque z prend diverses valeurs, T_i varie proportionnellement à δ et son évolution est très faible par rapport à celle qui correspondrait au transfert par le mouvement macroscopique.

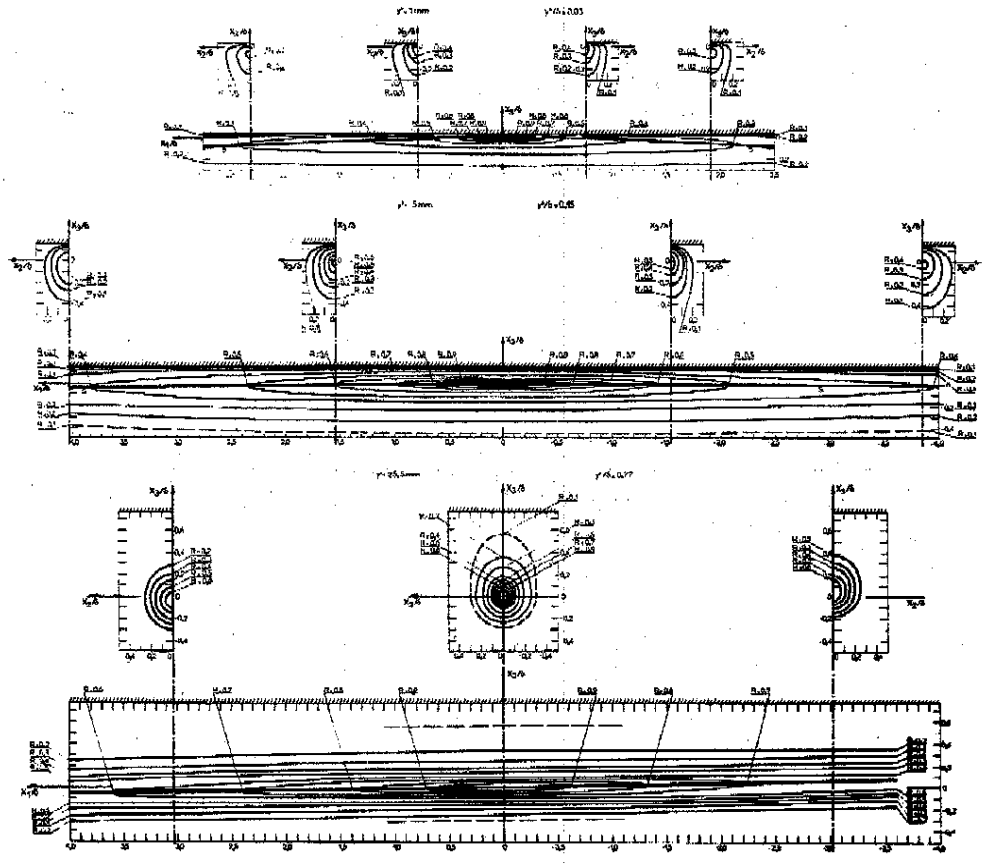


FIGURE 16
Surfaces d'isocoefficients de corrélations spatio-temporelles doubles avec retard optimum dans la couche limite d'une plaque plane. Récapitulation. Composantes $\alpha = 1$.
$\delta = 33$ mm. $R_\delta = 27\,900$.

2.3.2.2. Lorsque le décalage d'espace est à la fois longitudinal, latéral et transversal (Fig. 10, 13 à 16) le coefficient de corrélation mesurée $R_{1,1}\left(\frac{VT}{\delta}, \frac{X_1}{\delta}, \frac{X_2}{\delta}, \frac{X_3}{\delta}\right)$ est maximum pour un certain retard optimum T_m.

Dans le cas de ces expériences ce retard optimum est la somme $T_m = T_i + T_c$ du retard T_i et du retard T_c compensateur du mouvement moyen soit approximativement :

$$T_c \simeq \frac{2X_1}{V_A + V_B}$$

(fig. 12). Cette relation a été vérifiée avec une précision satisfaisante en tenant compte de l'effet sur les vitesses V_A et V_B des supports de sondes, du sillage du fil amont sur le fil aval, et des perturbations en envergure de l'écoulement (25).

2.3.3. Les fig. 13 à 16 présentent des surfaces d'isocoefficients de corrélations spatio-temporelles avec retard optimum $R_{1,1}(T_m, X_1, X_2, X_3) = C^{te}$, dans le cas de décalages d'espace longitudinaux, transversaux et latéraux.

Ces surfaces sont, en première approximation, symétriques par rapport au plan $X_1 X_3$. Leurs dimensions sont du même ordre transversalement en X_3 et latéralement en X_2. Elles présentent un grand allongement au long du mouvement moyen, en amont

—•———•— au long de la ligne de coefficient de corrélation maximum, avec retard optimum $T=T_m$ bande passante: 1 à 2 500 Hz

—×———×— au long de la ligne de coefficient de corrélation maximum, avec retard optimum $T=T_m$ bande passante: 1 à 275 Hz

—o———o— au long de la ligne de coefficient de courant macroscopique, sans retard $T=0$

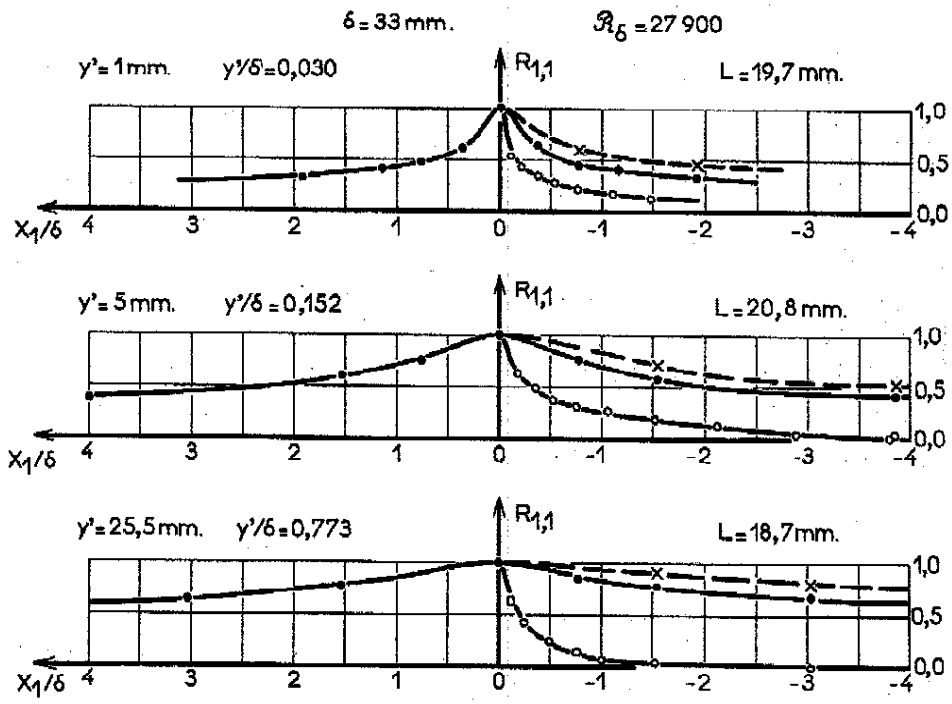


FIGURE 17
Coefficient de corrélations spatio-temporelles doubles dans la couche limite d'une plaque plane.

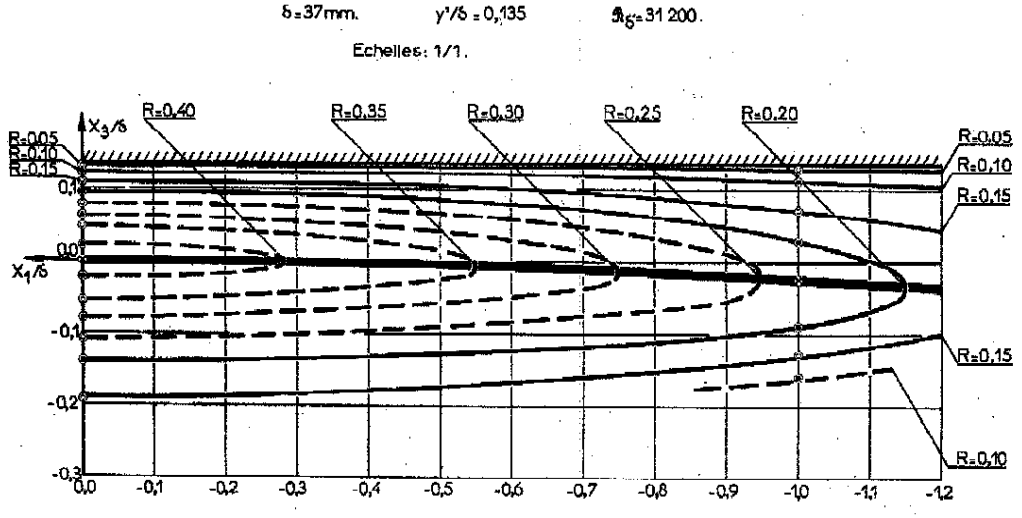


FIGURE 18
Surfaces d'isocoefficients de corrélations spatio-temporelles doubles avec retard optimum dans la couche limite d'une plaque plane.
Fluctuations longitudinales ($\alpha = 1$) et transversales ($\beta = 3$).

aussi bien qu'en aval, et ceci même pour une faible distance du point de référence à la paroi $\left(\frac{y'}{\delta} = 0{,}03\right)$

La ligne S de coefficient de corrélation maximum relative à un point A peut être définie comme le lieu des points B tels que pour chaque abcisse X_1 le coefficient de corrélation précité est maximum.

Dans le cas de ces expériences, ces lignes sont dans le plan de symétrie A, X_1 X_3. Hors de la couche limite, elles se confondent avec les lignes de courant moyennes (fig. 7) mais dans la couche limite elles en diffèrent nettement.

Il est utile de noter que les courbes d'isocorrélations spatio-temporelles doubles de vitesse avec retard optimum, représentant *non plus les coefficients de corrélations R*, mais leurs numérateurs $\overline{(v'_1)_A\,[v'_1\,(T, X_1, X_2, X_3]_B} = R_{1,1}\sqrt{\overline{(v'_1)^2_A}}\sqrt{\overline{(v'_1)^2_B}}$ qui figurent directement dans les équations, ont les mêmes caractères que les courbes d'isocoefficients de corrélations $R_{1,1}$.

La fig. 17 permet de comparer, au long des lignes S de corrélations spatio-temporelles doubles avec retard optimum, la corrélation avec retard $R_{1,1}\,(T_m, X_1 \simeq S)$, et sans retard $R_{1,1}\,(0, X_1 \simeq S)$ pour différentes distances $\frac{y'}{\delta}$ à la paroi du point de références A.

L'introduction du retard optimum rétablit des valeurs élevées du coefficient de corrélation, même à des distances supérieures à celle au delà de laquelle la corrélation spatiale est négligeable.

Lorsque le point de référence se rapproche de la paroi, ces valeurs mesurées à une distance donnée décroissent, ainsi que la valeur du rayon de courbure à l'origine. Elles croissent lorsque la bande de fréquences des mesures est réduite pour conserver seulement l'effet des tourbillons à grand échelle (fig. 17).

La fig. 18 présente des courbes d'isocoefficients de corrélations spatio-temporelles $R_{1,3}\,(T_m, X_1, X_2 = 0, X_3)$ relatives aux fluctuations orthogonales à la paroi $(v'_3)_A$ et longitudinales $(v'_1)_B$ dans des expériences un peu différentes des précédentes mais comparables [25].

Le tracé est effectué compte tenu des résultats analogues et plus détaillés décrits plus haut, concernant les fluctuations longitudinales $(v_1')_A$ et $(v'_1)_B$.

Comme les courbes $R_{1,1} = Cte$, les courbes $R_{1,3} = Cte$ ont un grand allongement au long du mouvement moyen.

La ligne de coefficient de corrélation maximum concernant $R_{1,3}$, peut être définie de la même façon que celle concernant $R_{1,1}$, elle présente le même aspect, et paraît en être voisine. $R_{1,3}$, mesuré au long de cette ligne, diminue relativement plus vite que $R_{1,1}$.

2.4. *Corrélations spatio-temporelles triples dans une couche limite*

Les premiers essais ont été effectués en associant un amplificateur quadratique à l'appareillage de mesure des corrélations doubles de l'I.M.S.T. (3, 4, 10, 22) ; la précision est moindre que pour celles-ci (27).

La fig. 19 donne un exemple de valeurs du coefficient de corrélation

$$R_{11,1}\left(\frac{VT}{\delta}, \frac{X_1}{\delta}, 0, 0\right)$$

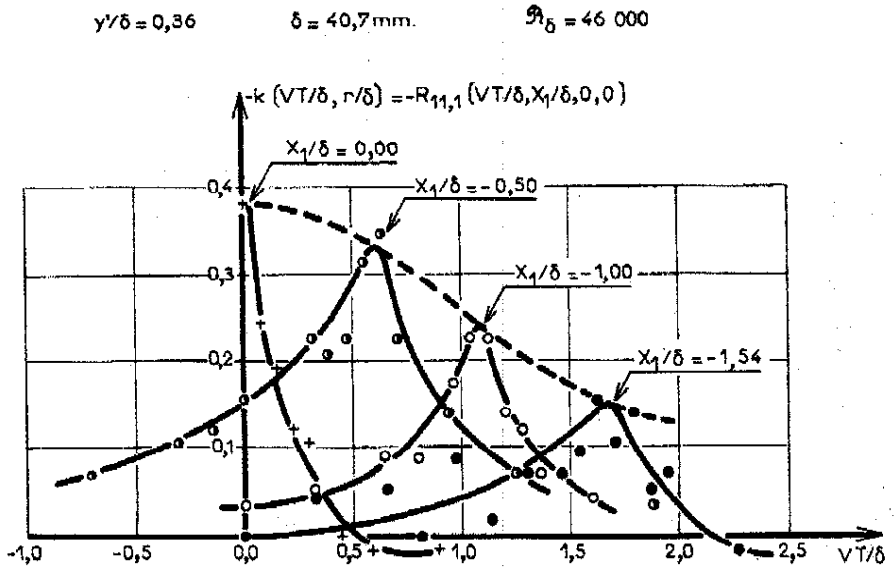


FIGURE 19
Coefficient de corrélations spatio-temporelles triples dans une couche limite avec gradient de pression positif.

Comme dans le cas des corrélations doubles (2.2, 2.3) ce coefficient atteint un maximum pour une valeur optimum T_m du retard, fonction de $\frac{X_1}{\delta}$. Dans le cas de ces expériences, et en première approximation, T_m est égal au retard compensateur du mouvement d'ensemble $T_c \simeq \frac{2 X_1}{V_A + V_B}$, T_i étant négligeable.

En seconde approximation, les retards optima mesurés sont inférieurs aux retards T_c les écarts augmentant en moyenne avec $\frac{X_1}{\delta}$. Il y aura lieu de chercher ultérieurement si ces écarts sont dûs à des erreurs de mesures, ou s'ils sont significatifs.

Comme dans le cas des corrélations doubles, l'introduction du retard optimum augmente fortement les valeurs du coefficient de corrélations spatio-temporelles triples, même à des distances supérieures à celle au delà de laquelle la corrélation spatiale est négligeable.

3.0. Corrélations spatio-temporelles doubles de pression en écoulements compressibles

3.1. *Ecoulements subsoniques*

WILLMARTH [23] a effectué à l'aide de l'appareil * dû à SKINNER [15], des mesures de coefficients de corrélation spatio-temporelles doubles de pression à la paroi produites par une couche limite en régime subsonique. Ces essais concernent l'étude du mécanisme de la génération du bruit par la turbulence, en présence de parois non rigides.

* Basé sur le principe d'un échantillonnage des signaux, et d'un calcul par une méthode digitale (Sampling System).

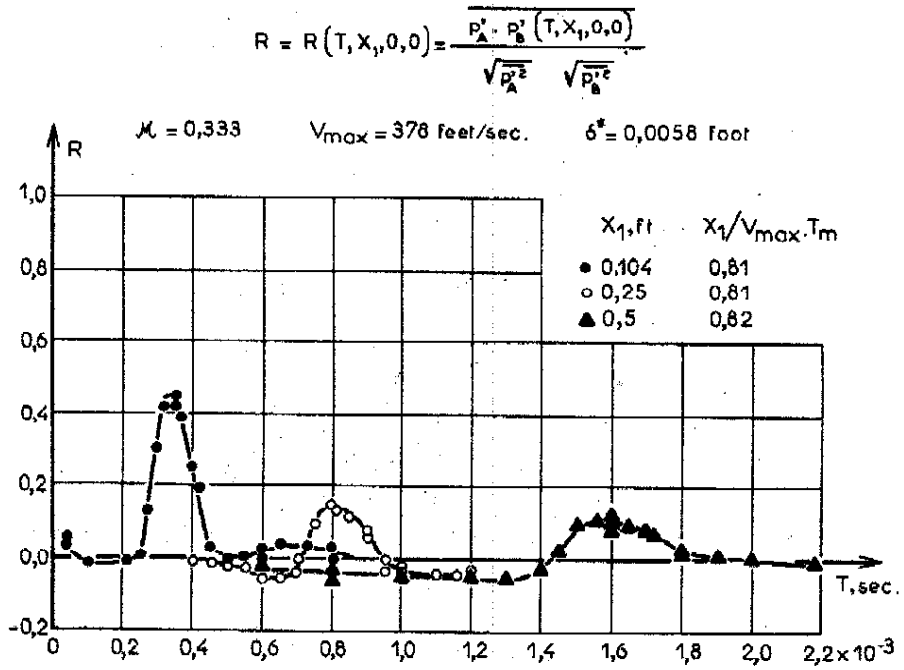


FIGURE 20
Coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles de pressions à la paroi, dans une couche limite (WILLMARTH).

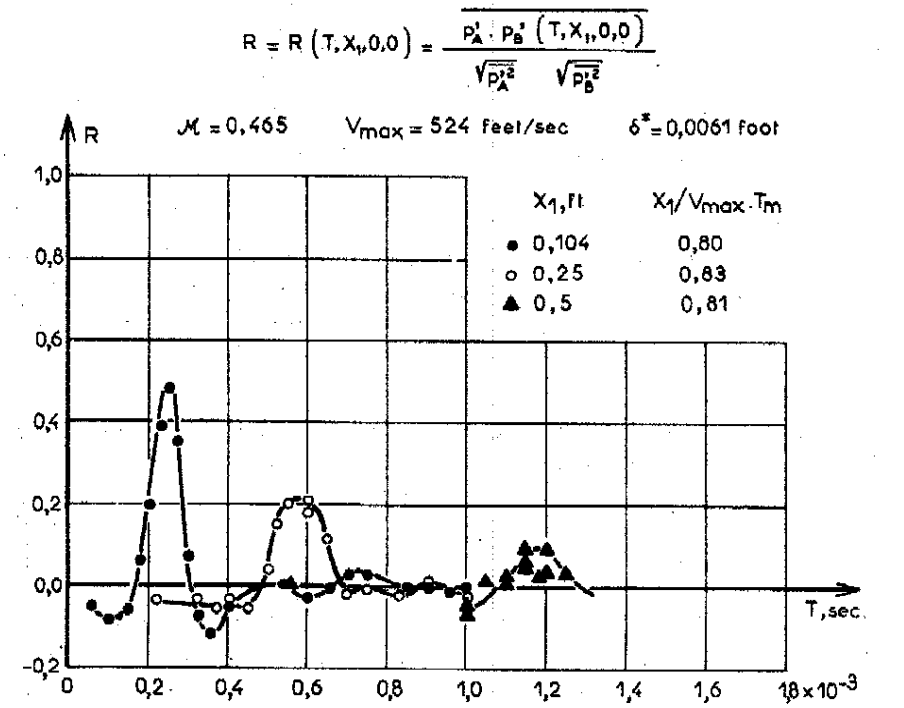


FIGURE 21
Coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles de pressions à la paroi, dans une couche limite (WILLMARTH).

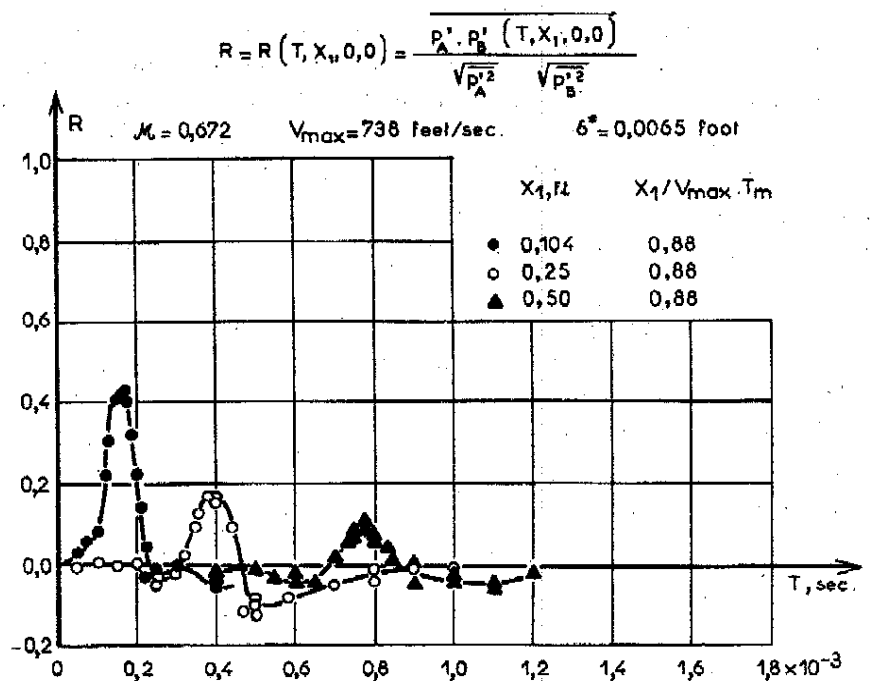


FIGURE 22
Coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles de pressions à la paroi, dans une couche limite (WILLMARTH).

Les mesures sont faites à des nombres de Mach compris entre 0,3 et 0,7 (fig. 20 à 22).

Dans les cas examinés, le coefficient de corrélation atteint un maximum pour un retard optimum T_m tel que $X_1 \simeq 0{,}82$ à $0{,}88\ V_{1\max} \cdot T_m$. La valeur $0{,}82\ V_{1\max}$ à $0{,}88\ V_{1\max}$ est la vitesse moyenne à laquelle les fluctuations de pression à la paroi sont transférées par la couche limite.

Les corrélations spatio-temporelles maxima sont réduites à la moitié de leur valeur sur une distance $\dfrac{X_1}{\delta} \simeq 2$.

Les corrélations des fluctuations de pression sont divisées par dix sur une longueur de transfert approximativement égale à dix fois l'épaisseur de la couche limite; elles ont alors pratiquement perdu leur identité.

L'ordre de grandeur est le même que dans le cas des expériences relatives aux corrélations spatio-temporelles doubles de vitesses, dans diverses couches limites (2.3.).

3.2. *Ecoulements supersoniques*

LAUFER [26] a effectué les premières mesures de corrélations spatio-temporelles doubles * dans une couche limite turbulente en régime supersonique, à diverses distances de la paroi rigide, et hors de la couche limite.

* A l'aide d'un appareil construit au J.P.L. (Sampling System). La bande passante s'étend jusqu'à 300 KHz, le retard peut atteindre plusieurs millisecondes.

L'énergie rayonnée sous forme de bruit n'est notable qu'aux régimes supersoniques. Les résultats d'expériences concordent qualitativement avec le modèle du champ rayonné (intensité et directivité) donné par la théorie de Phillips concernant les hauts nombres de Mach. Cependant, même aux plus grands nombres de Mach utilisés ($M = 5$) quelques-unes des hypothèses de la théorie asymptotique ne sont pas vérifiées.

L'affaiblissement de la turbulence dû à la perte d'énergie par rayonnement acoustique correspond à un faible pourcentage du travail effectué par les frottements à la paroi.

Les expériences concernent l'étude en fonction du temps du champ de pression hors de la couche limite et à la paroi, en des positions distantes de X_1 longitudinalement et X_3 orthogonalement à la paroi.

Dans la couche limite la turbulence comprend principalement les modes rotationnel et entropique, et dans une moindre mesure le mode acoustique. Hors de la couche limite à une distance suffisante, le mode acoustique est prépondérant.

L'étude concerne la relation entre ce bruit aérodynamique et les fluctuations dans la couche limite.

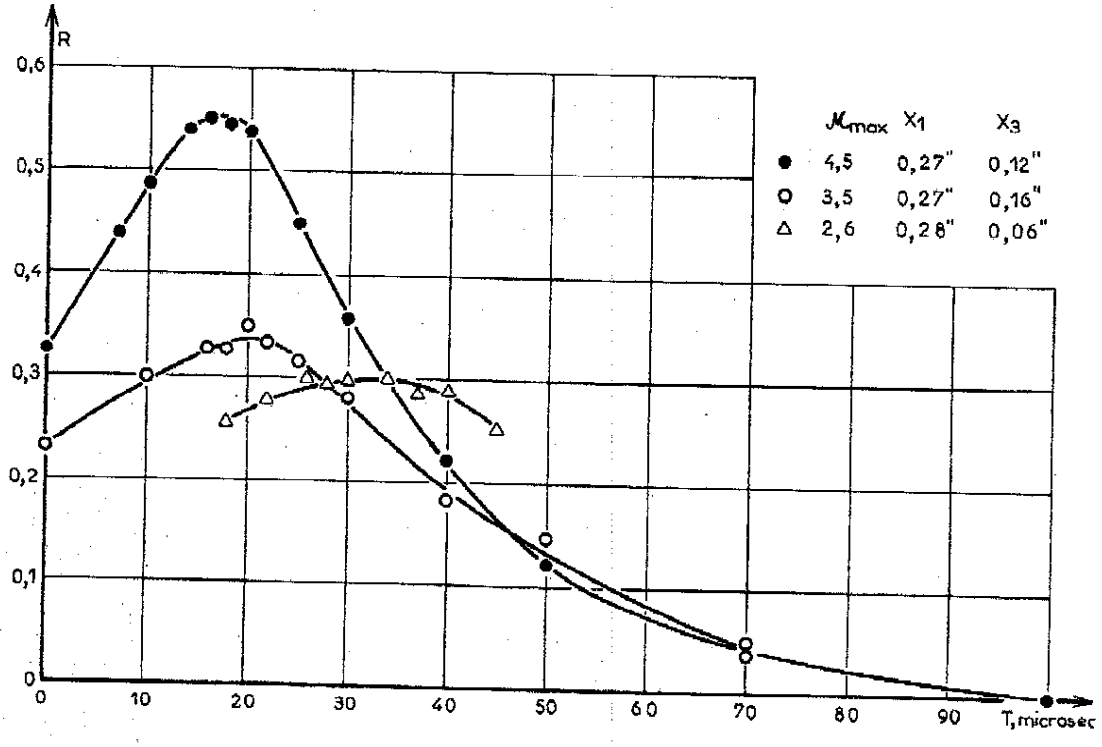


FIGURE 23
Coefficients de corrélations spatio-temporelles doubles de pressions, hors de la couche limite, en écoulements supersoniques (LAUFER).

La fig. 23 donne le coefficient de corrélation spatio-temporelle des pressions hors de la couche limite pour trois nombres de Mach différents.

Pour un retard optimum dans le temps T_m la corrélation est maximum. Il existe

donc une vitesse $V_c = \frac{X_1}{T_m}$ avec laquelle le champ de corrélations se déplace dans le sens du courant. Ces expériences impliquent que les fronts d'ondes ont une direction préférentielle; en fait lorsque le nombre de Mach croit l'énergie sonore est de plus en plus orientée dans une direction particulière; les maxima de corrélation vont en croissant. L'étude spectrale montre que les caractéristiques directionnelles des ondes sonores de toutes les longueurs d'ondes sont les mêmes.

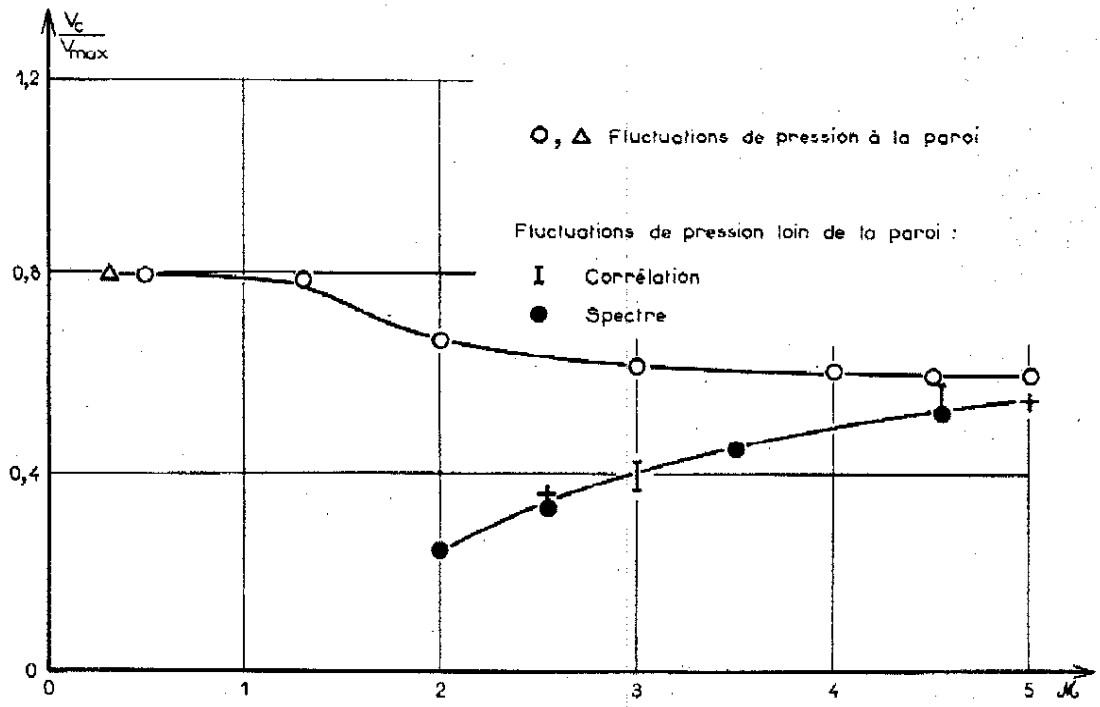


FIGURE 24
Vitesse relative de transfert pour les fluctuations de pression (LAUFER).

La fig. 24 indique la variation de la vitesse de transfert V_c avec le nombre de Mach.

Dans le cas des mesures des fluctuations de pression à la paroi, ces dernières sont produites principalement par la turbulence de vitesse à grande échelle dans la couche limite qui porte une part importante de l'énergie et qui est anisotrope.

Pour les faibles nombres de mach, cette vitesse de transfert est 0.8 V_{max}, elle concorde avec celle du transport du champ des vitesses turbulentes mesurées en fluide incompressible par la méthode des corrélations spatio-temporelles (2.3.).

Dans le cas des mesures hors de la couche limite la vitesse relative $\frac{U_c}{V_{max}}$ est beaucoup moindre à Mach 2 que dans le cas précédent, et s'en rapproche à Mach 5. D'après la théorie de Phillips, dans la couche limite, seule une couche voisine de la paroi, supersonique par rapport à l'écoulement libre, est effectivement productrice de son.

Les sources de son sont alors transférées avec la vitesse moyenne de cette couche. L'épaisseur relative de cette couche augmente avec le nombre de Mach, donc aussi la vitesse moyenne de transfert des sources de bruit.

Ainsi l'hypothèse de Phillips paraît vérifiée qualitativement, d'après laquelle le mécanisme de génération du bruit aérodynamique peut être figuré par une paroi virtuelle mobile, ondulée aléatoirement, formée par un champ de tourbillons se déplaçant à vitesse supersonique par rapport à l'écoulement libre. Ce mécanisme produit un champ du type acoustique qui à grande distance, est homogène et directionnel.

Des mesures de corrélations spatio-temporelles plus complètes, en écoulements supersoniques, et particulièrement au voisinage de la paroi, sont encore nécessaires.

4.0. **Conclusions**

4.1. Certaines des expériences décrites ci-dessus ont montré la longue conservation des corrélations spatio-temporelles de vitesses, et de pressions, au long du mouvement moyen. Dans le cas des vitesses, cette propriété correspond à une vérification et à une extension de l'hypothèse de Taylor.

On peut espérer apporter une information complémentaire utile à la détermination des tensions de Reynolds, en introduisant cette propriété dans les équations moyennes aux corrélations spatio-temporelles, en particulier dans le cas où le retard est égal au temps optimum, et en faisant tendre vers zéro le décalage d'espace.

4.2. Des expériences ont été réalisées permettant, par des méthodes basées sur les propriétés des fonctions d'autocorrélation [7], ou de corrélation spatio-temporelles [15], de séparer les ondes acoustiques se propageant dans un milieu turbulent, de la turbulence se déplaçant avec la vitesse moyenne de l'écoulement.

REFERENCES

[1] Taylor, G. I. (1938). The spectrum of turbulence. *Proc. Roy. Soc.*, London, Ser. A, **164**, 476, Londres.

[2] Favre, A. (1946). *Appareil de mesures statistiques de la corrélation dans le temps.* VI[e] Congr. Intern. Appl., Paris.

[3] Favre, A. (1948). *Mesures statistiques de la corrélation dans le temps.* VII[e] Congr. Intern. Appl., Londres.

[4] Favre, A., Gaviglio, J. *Perfectionnements à l'appareil de mesures statistiques de la corrélation dans le temps et l'espace.* ONERA*, 30-6-1950, Paris.

[5] Favre, A., Gaviglio, J., Dumas, R. Mesures de la corrélation dans le temps et l'espace en soufflerie. *Coll. Intern. Mécan.* Poitiers, 1950.

[6] Favre, A., Gaviglio, J., Dumas, R. (1952). *Mesures, dans la couche limite, des intensités de turbulence et des corrélations dans le temps, spectres.* Coll. Nat. N° 1 du CNRS, Marseille, 1952. Publ. Sc. et Techn. Minist. de l'Air, n° 296, Paris.

[7] Favre, A., Gaviglio, J. (1952). *Détection par autocorrélation de signaux périodiques perturbés par des parasites aléatoires.* Coll. Nat. N° 1 du CNRS, Journées de Mécan. des Fluides, Marseille. P.S.T. Minist. de l'Air, n° 296, Paris.

[8] Favre, A. Gaviglio, J., Dumas, R., (1952). Quelques mesures de corrélation dans le temps et l'espace en soufflerie. *La Recherche Aéronautique,* n° 32, Mars-Avril, Paris.

[9] Kovasnay, L.S.G. (1953). Turbulence in supersonic flow. *J.A. Sc.*, Vol. 20, n° 10, Octobre.

[10] Favre, A. (1954). Mesures statistiques de la corrélation dans le temps. Premières applications à l'étude des mouvements turbulents en soufflerie. *Publ. ONERA* n° 67, Paris.

* Non publié.

[11] FAVRE, A., GAVIGLIO, J., DUMAS, R. (1954). Nouvelles mesures dans la couche limite d'une plaque plane, des intensités de turbulence, et des corrélations dans le temps, spectres. *La Rech. Aéro.*, n° 38, Mars-Avril, Paris.

[12] FAVRE, A., GAVIGLIO, J., DUMAS, R. (1954). Corrélation dans le temps et l'espace, avec filtre de bande, en aval d'une grille de turbulence. *La Rech. Aéro.*, n° 40, Juillet-Aaoût, Paris.

[13] FAVRE, A. GAVIGLIO, J., DUMAS, R. (1955). *Some measurements of time and space correlation in wind-tunnel*, NACA T.M. 1370, Washington.

[14] FAVRE, A., GAVIGLIO, J., DUMAS, R. (1955). Couche limite turbulente : corrélations spatio-temporelles doubles, spectres. *La Rech. Aéro.*, n° 48, Nov.-Déc., Paris.

[15] SKINNER, G.T. (1956). *Time Correlator for Problems in Aerodynamics.* NACA T.N. 3682.

[16] FAVRE, A., GAVIGLIO, J., DUMAS, R. (1956). *Corrélations spatio-temporelles et spectres dans la couche limite turbulente.* IX[e] Congr. Inter. Mécan. Appl., Bruxelles.

[17] FAVRE, A. (Déc. 1956). *Quelques résultats d'expériences sur la turbulence; corrélations spatio-temporelles; spectres.* N.T. Minist. de l'Air, Mars 1958, Séminaire d'Aérothermique de la Fac. des Sc. de Paris.

[18] FAVRE, A., GAVIGLIO, J., DUMAS, R. (June 1957). Space -time double correlations and spectra in a turbulent boundary layer. *J. of Fl. Mech.*, Vol. 2, Part 4, P. 313.

[19] GRANT, H.L. (June 1958). The large eddies of turbulent motion. *J. of Fl. Mech.*, Vol. 4, Part 2, P. 149.

[20] FAVRE, A., GAVIGLIO, J., DUMAS, R. (January 1958). Further space-time correlation of velocity in a turbulent boundary layer. *J. of Fl. Mech.*, Vol. 3, Part 4, P. 344.

[21] FAVRE, A., GAVIGLIO, J., DUMAS, R. Couche limite turbulente : Corrélations spatio-temporelles; spectres de vitesse. *Publ. ONERA*, n° 92, Paris.

[22] GAVIGLIO, J., Sur quelques problèmes de mesures de turbulence, effectuées à l'aide de l'anémomètre à fils chauds parcourus par un courant d'intensité constante. P.S.T. Ministr. de l'Air, n° 385, 1962, Paris.

[23] WILLMARTH, W.W. (March 1959). *Space-time correlations and spectra of wall pressure in a turbulent boundary layer.* NASA Memo 3-17-1959, Washington.

[24] STERNBERG, J. (Nov. 1959). A theory for the laminar sublayer of a turbulent flow. Meeting of the fluid dynamics. *American Phys. Soc.*, Ann Arbor.

[25] FAVRE, A. GAVIGLIO, J. (Avril 1960). *Turbulence et perturbations dans la couche limite d'une plaque plane.* Boundary Layer Research Meeting, AGARD, Londres.

[26] LAUFER, J. (28 août - 2 sept. 1961). *Sound radiation from a turbulent boundary layer.* Inter. Coll. of the Mech. of Turb, Marseille.

[27] FAVRE, A., GAVIGLIO, J. (1961). Appareil de mesure des corrélations spatio-temporelles triples. Premières mesures dans une couche limite turbulente, avec gradient de pression positif. ONERA*, Paris.

DISCUSSION

R. BETCHOV. — Les courbes d'isocorrélations derrière une grille montrent une excentricité.

Ce facteur non-dimensionnel est l'un des aspects essentiels du mouvement. Comment varie-t-il avec le nombre de Reynolds ?

Réponse de l'auteur :

Des expériences sont en cours, qui ont notamment pour objet de répondre à cette question, et d'étudier la corrélation spatio-temporelle *maximum maximorum* et ses relations avec la diffusion.

* Non publié.

PRÉCISIONS SUR LA STRUCTURE LOCALE DE LA TURBULENCE DANS UN FLUIDE VISQUEUX AUX NOMBRES DE REYNOLDS ÉLEVÉS

par A. H. KOLMOGOROV

de l'Académie des Sciences de Moscou (U.R.S.S.)

Dans le programme du Symposium faisant suite à notre Colloque entre l'exposé de A. M. OBUKHOV : « Some Specific Features of Atmospheric Turbulence ». Un des chapitres de cet exposé est consacré à la précision de la représentation concernant la structure locale de la turbulence. Il a un grand intérêt pour tous les spécialistes de la théorie statistique de la turbulence. A la demande de certains participants du Colloque, je voudrais présenter ici avec plus de détails l'origine de ces précisions et donner l'exposé des derniers résultats obtenus par A. M. OBUKHOV dans ce domaine.

Elaborées en 1939-1941 par moi [1, 2, 3] et par A. M. OBUKHOV [4, 5] les représentations concernant la structure locale de la turbulence aux nombres de Reynolds élevés ont eu comme base l'idée de RICHARDSON de l'existence dans l'écoulement turbulent de tourbillons de toutes échelles possibles,

$$l < r < \mathrm{L}$$

entre « l'échelle externe » L et « l'échelle interne » l, et de l'existence d'un certain mécanisme uniforme de la transmission de l'énergie des tourbillons d'échelle plus grande vers ceux plus fins.

Ces représentations, auxquelles sont arrivés d'autres auteurs, ont obtenu une très large extension. Cependant bientôt après leur apparition, L. D. LANDAU avait remarqué qu'elles ne prennent pas en considération le fait qui découle de l'hypothèse que le mécanisme de la transmission de l'énergie des tourbillons plus gros vers les plus fins a un caractère fortuit et chaotique : avec l'augmentation du rapport $\frac{\mathrm{L}}{l}$, la variation de la dissipation de l'énergie

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \cdot \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2$$

doit augmenter d'une façon illimitée. Plus exactement, il est naturel d'admettre que la dispersion du logarithme de la valeur ε a, lorsque $\frac{\mathrm{L}}{l} \gg 1$, une valeur asymptotique de la forme

$$\sigma^2_{\log \varepsilon} \sim A + k' \log \frac{L}{l} \tag{1}$$

où k' est une certaine constante universelle.

C'est tout dernièrement que A. M. Obukhov avait tracé le chemin pour spécifier les résultats [1, 5] en prenant en considération la remarque de L. D. Landau. La méthode s'appuie sur l'examen de la dissipation de

$$\varepsilon_r(x, t) = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{|h| \leqslant r} \varepsilon (\mathbf{x} + \mathbf{h}, t)\, dh$$

prise en moyenne pour une sphère de rayon r, et en même temps s'appuie sur la supposition qu'avec un rapport $\frac{L}{l}$ élevé, le logarithme de la valeur $\varepsilon_r(\mathbf{x}, t)$ a une répartition normale. Il est donc tout à fait naturel de considérer que la dispersion du logarithme de $\varepsilon_r(\mathbf{x}, t)$ a la forme

$$\sigma^2_r(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t) + 9\, k \log \frac{L}{r} \tag{2}$$

où k est la constante universelle et où $A(\mathbf{x}, t)$ dépend de la macrostructure de l'écoulement. Le facteur 9 est commode pour des calculs ultérieurs.

Mon exposé de la conception de A. M. Obukhov se rangera du côté de [1] et s'appuiera sur la modification correspondante des deux hypothèses de similitude tirées de [1]. Comme troisième hypothèse sera utilisée l'hypothèse déjà formulée de la normalité de la répartition du logarithme ε_r avec la formule (2) pour la dispersion de ce logarithme.

La formule connue

$$B_{dd}(r) = C r^{2/3} \bar{\varepsilon}^{2/3}$$

d'après [1] se remplace avec les nouvelles hypothèses par la formule :

$$B_{dd}(r) = C(\mathbf{x}, t) \cdot r^{2/3} \cdot \bar{\varepsilon}^{2/3} \left(\frac{L}{r}\right)^{-k} \tag{3}$$

où k est la constante de (2) et le facteur $C(\mathbf{x}, t)$ dépend de la macrostructure de l'écoulement. Au lieu de la proposition de la constance de l'asymétrie de :

$$S(r) = \frac{B_{ddd}(r)}{B^{3/2}_{dd}(r)}$$

avec $l \ll r \ll L$ formulée dans [2] nous obtenons maintenant

$$S(r) = S_0 \left(\frac{L}{r}\right)^{3/2\,k} \tag{4}$$

où le coefficient S_0 dépend aussi de la macrostructure de l'écoulement.

Lions avec l'échelle de longueur r et avec le point (x, t) les échelles de temps et de vitesse

$$T_r = r^{2/3} \cdot \bar{\varepsilon}_r^{-1/3}$$

$$U_r = r^{1/3} \cdot \bar{\varepsilon}_r^{1/3}$$

et l'échelle interne de longueur

$$l_r = \nu^{3/4} \cdot \bar{\varepsilon}_r^{-1/4}$$

Il est évident que le nombre de Reynolds composé à partir de U_r et r s'exprime par le rapport de $\frac{r}{l_r}$ d'après la formule :

$$R_e = \frac{U_r \cdot r}{\nu} = \left(\frac{r}{l_r}\right)^{4/3} \tag{5}$$

Les coordonnées x'_α, t' du point $(\mathbf{x}', t')$ de la région du point (x, t) s'expriment par les expressions sans dimensions ξ_α et τ

$$x'_\alpha = x_\alpha + \xi_\alpha \cdot r\,, \qquad t' = t + \tau \cdot T_r$$

Introduisons des vitesses relatives sans dimension

$$V_\alpha(\xi, \tau) = \frac{U_\alpha(\mathbf{x} + \xi r, t + \tau T_r) - U_\alpha(\mathbf{x}, t)}{U_r}$$

Première hypothèse de similitude

Si nous avons $r \ll L$, dans ce cas pour des valeurs données

$$\xi_\alpha^{(k)}, \quad \tau^{(k)}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \qquad k = 1, 2, \ldots, \eta,$$

la distribution de probabilité des 3 n grandeurs

$$V_\alpha(\xi^{(k)}, \tau^{(k)})$$

lorsque $R_{e_r} = R_e$

dépend de R_e seulement et est la même dans tous les écoulements turbulents.

Deuxième hypothèse de similitude

Lorsque $R_e \gg 1$

la distribution indiquée dans la première hypothèse ne dépend pas de R_e.

Nous allons désigner les symboles mathématiques absolus (moyennes) par un trait — au-dessus. Comme $\bar{\varepsilon}$ est presque constante dans des régions de petites dimensions en comparaison avec l'échelle extérieure L, dans ce cas, lorsque $r \ll L$, on peut considérer que

$$\bar{\varepsilon}_r = \bar{\varepsilon} \tag{6}$$

Examinons la différence entre les composantes de vitesses extrêmes en deux points se trouvant à une distance r entre eux :

$$\Delta_{dd}(r) = u_1(x_1 + r, x_2, x_3, t) - u_1(x_1, x_2, x_3, t)$$

on voit que

$$\Delta_{dd}(r) = V_\alpha(1, 0, 0, 0) \cdot r^{1/3} \cdot \varepsilon_r^{1/3} \tag{7}$$

Si $r \gg l$

où l est la limite supérieure (à l'exception des cas de probabilité négligeable) de l'échelle interne l_r, dans le cas d'après (6), (7) et les hypothèses I et II il découle que :

$$\overline{|\Delta_{dd}(r)|^3} = C \cdot r\,\bar{\varepsilon} \tag{8}$$

où C est une constante absolue.

Maintenant il faut profiter de la formule montrée par A. M. Obukhov applicable pour les cas où les moments des quantités ont une loi logarithmique de répartition normale.

Voici cette formule :

$$\overline{\zeta^p} = \exp\left(pm + \frac{p^2\sigma^2}{2}\right) \tag{9}$$

où m et σ^2 sont la moyenne et la dispersion de $\log \zeta$.

D'après (2), (7), (8) et (9) découle

$$\overline{|\Delta_{dd}(r)|^p} = C_p(\mathbf{x}, t)\,(r\bar{\varepsilon})^{p/3}\left(\frac{L}{r}\right)^{k\frac{p(p-3)}{2}} \tag{10}$$

en particulier avec $p = 2$

$$\overline{\Delta^2_{dd}(r)} = C_2(\mathbf{x}, t)\,(r\bar{\varepsilon})^{2/3}\left(\frac{L}{r}\right)^{-k}$$

c'est-à-dire la formule (3).

De (3) découle (4) parce que la formule dans [2] $B_{ddd}(r) = -\frac{4}{5}\varepsilon r$ reste valable.

Il est possible d'éliminer dans notre exposé le choix particulier de la grandeur $\varepsilon_r(\mathbf{X}, t)$, se trouvant à la base de considérations de A. M. Obukhov. Dans ce cas deux hypothèses se formulent ainsi :

Première hypothèse de similitude

Si $|x^{(k)} - x| \ll L$, $k = 0,1, ..., n$, la distribution de probabilité des 3 n grandeurs,

$$\frac{U_\alpha(\mathbf{x}^{(k)}) - U_\alpha(\mathbf{x})}{U_\alpha(\mathbf{x}^{(0)}) - U_\alpha(\mathbf{x})} \qquad \alpha = 1, 2, 3 \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{11}$$

dépend du nombre de Reynolds seulement

$$R_e = \frac{|U(\mathbf{x}^{(0)}) - U(\mathbf{x})|\,|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}|}{\nu}$$

Deuxième hypothèse de similitude

Lorsque $Re \gg 1$

la distribution indiquée dans la première hypothèse ne dépend pas de Re.

Le contenu des hypothèses supplémentaires de A. M. Obukhov peut être formulé ainsi :

Troisième hypothèse

Deux groupes de grandeurs (II) sont stochastiquement indépendantes, si, dans le premier groupe

$$|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}| \geqslant r_1,$$

dans le deuxième groupe

$$|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}| \leqslant r_r \qquad \text{et} \qquad r_1 \gg r_r$$

Si on veut déduire à partir de la troisième hypothèse la normalité logarithmique rigoureuse de la répartition des différences de vitesses et la formule pour la dispersion des logarithmes de ces différences, identique à celle de (1) et (2), il faut formuler cette hypothèse avec la précision nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KOLMOGOROV, A.H. (1941). *Communication à l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, **30**, p. 299.
[2] KOLMOGOROV, A.H. (1941). *Communication à l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, **31**, p. 147.
[3] KOLMOGOROV, A.H. (1941). *Communication à l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, **32**, p. 19.
[4] OBUKHOV, A.M. (1941). *Communication à l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, **30**, p. 22.
[5] OBUKHOV, A.M. (1941. *Information de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, série géographique et géophysique, p. 453.

La traduction allemande des travaux [1-5] se trouve dans : « *Sammelband zur statistischen theorie der turbulenz* ». Akademie - Verlag, Berlin, 1958.

А.Н. Колмогоров

УТОЧНЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА.

В программу примыкающего к нашему коллоквиуму симпозиума включен доклад А.М. Обухова "Some Specific Features of Atmospheric Turbulence". Один из разделов этого доклада посвящен уточнению представлений о локальной структуре турбулентности и имеет более широкий интерес для всех специалистов в статистической теории турбулентности. По просьбе некоторых участников коллоквиума я хочу изложить здесь более подробно происхождение этих уточнений и дать изложение последних результатов А.М. Обухова в этой области.

Разработанные в 1939-1941 гг мною [1,2,3] и А.М. Обуховым [4, 5] представления о локальном строении турбулентности при больших числах Рейнольдса имели своей наглядной основой идею Ричардсона о существовании в турбулентном потоке вихрей всех возможных масштабов

$$l < r < L$$

между "внешним масштабом" L и "внутренним масштабом" l и некоторого единообразоного механизма передачи энергии от вихрей более крупного масштаба к вихрям более мелкого масштаба.

Эти представления, к которым пришел независимо и ряд других авторов, получили весьма широкое распространение. Однако, еще вскоре после их возникновения Л.Д. Ландау заметил, что они не учитывают одного обстоятельства, которое непосредственно вытекает из предположений о существенно случайном, хаотическом характере механизма передачи энергии от более крупных вихрей к более мелким: с возрастанием отношения L : l изменчивость диссипации энергии

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2$$

должна неограниченно возрастать. Более точно, естественно предположить, что дисперсия логарифма величины ε имеет при $L : l >> 1$ ассимптотику вида

$$\sigma^2_{\log \varepsilon} \sim A + k' \log \frac{L}{l}, \qquad (1)$$

где k' некоторая универсальная константа.

Лишь недавно А.М. Обухов наметил путь к уточнению результатов [1-5] с учетом замечания Л.Д. Ландау. Этот путь опирается на рассмотрение диссипации

$$\varepsilon_r(x,\ t) = \frac{3}{4\pi r^3}\int_{|h|\leqslant r} \varepsilon(x + h,\ t)dh$$

осредненной по сфере радиуса r, и допущение, что при большом отношении L : r логарифм величины $\varepsilon_r(x,\ t)$ имеет нормальное распределение. Естественно считать, что дисперсия логарифма $\varepsilon_r(x,\ t)$ имеет вид

$$\sigma_r^2(x,\ t) = A(x,\ t) + 9k \log \frac{L}{r} \tag{2}$$

где k универсальная константа, а A(x, t) зависит от макроструктуры потока.

Мое изложение концепции А.М. Обухова будет примыкать непосредственно к [1] и опираться на соответствующее видоизменение двух ГИПОТЕЗ ПОДОБИЯ из [1] .В виде третьей гипотезы будет использована уже сформулированная гипотеза нормальности распределения логарифма ε_r с формулой (2) для дисперсии этого логарифма.

Известная формула

$$B_{dd}(r) = c\, r^{2/3}\bar{\varepsilon}^{2/3}$$

из [1] при новых допущениях заменяется формулой

$$B_{dd}(r) = c(x,\ t)\, r^{2/3}\bar{\varepsilon}^{2/3}\left(\frac{L}{r}\right)^{k}, \tag{3}$$

где k константа из (2), а множитель c(x, t) зависит от макроструктуры потокэ. Вместе предложения о постоянстве ассиметрии

$$S(r) = \frac{B_{ddd}(r)}{B_{dd}^{3/2}(r)}$$

при $1 \ll r \ll L$, сформулированного в [2] , получим теперь

$$S(r) = S_0\left(\frac{L}{r}\right)^{\frac{3}{2}k} \tag{4}$$

где коэффициент S_0 тоже зависит от макроструктуры потока.

Свяжем с масштабом длины r и точкой (x, t) масштабы времени и скорости

$$T_r = r^{2/3}\varepsilon_r^{-1/3}$$

$$U_r = r^{1/3}\varepsilon_r^{1/3}$$

и "внутренний масштаб" длины

$$l_r = \nu^{3/4} \varepsilon_r^{-1/4}$$

Очевидно, что образованное из U_r и r число Рейнольдса выражается через отношение $r : l_r$ по формуле

$$\mathrm{Re} = \frac{U_r r}{\nu} = \left(\frac{r}{l_r}\right)^{4/3} \tag{5}$$

Координаты x'_a, t' точки (x', t') из окрестности точки (x, t) выразим через безразмерные ξ_a и τ :

$$x'_a = x_a + \xi_a r, \qquad t' = t + \tau T_r$$

Введем безразмерные относительные скорости

$$V_a(\xi, \tau) = \frac{U_a(x + \xi r, t + \tau T_r) - U_a(x, t)}{U_r}$$

Первая гипотеза подобия

Если $r \ll L$, то при заданных

$$\xi_a^{(k)}, \ \tau^{(k)}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

условное распределение $3n$ величин

$$V_a(\xi^{(k)}, \tau^{(k)})$$

при фиксированном значении

$$\mathrm{Re}_r = \mathrm{Re}$$

зависит только от Re и одинаково во всех турбулентных потоках.

Вторая гипотеза подобия

При

$$\mathrm{Re} \gg 1$$

указанные в первой гипотезе распределения не зависят от Re.

Безусловные математические ожидания /средние/ будем обозначать чертой сверху. Так как $\bar{\varepsilon}$ почти постоянно в областях малых по сравнению с внешним масштабом L, то при $r \ll L$ можно считать

$$\bar{\varepsilon}_r = \bar{\varepsilon} \tag{6}$$

Рассмотрим разность продоленых компонент скоростей в двух точках на расстоянии r :

$$\Delta_{dd}(r) = U_1(x_1 + r, x_2; x_3, t) - U_1(x_1, x_2, x_3, t)$$

Легко видеть, что

$$\Delta_{dd}(r) = V_a(1, 0, 0, 0) r^{1/3} \varepsilon_r^{1/3} \tag{7}$$

Если

$$r >> 1$$

где l верхняя грань /за исключением случаев пренебрегаемо мало вероятных/ внутреннего масштаба l_r, то из (6), (7) и гипотез I и II вытекает, что

$$\overline{|\Delta_{dd}(r)|^3} = C r \bar{\varepsilon} \tag{8}$$

где C абсолютная константа.

Теперь следует воспользоваться отмеченной А.М. Обуховым формулой, выражающей моменты величин имеющих логарифмически нормальный закон распределения. Эта формула такова

$$\overline{\xi^p} = \exp\left(pm + \frac{p^2\sigma^2}{2}\right) \tag{9}$$

где m и σ^2 среднее и дисперсия $\log \xi$. Из (2), (7), (8), и (9) вытекает

$$\overline{\Delta_{dd}(r)^p} = c_p(x, t)(r\bar{\varepsilon})^{p/3}\left(\frac{L}{r}\right)^{k\frac{p(p-3)}{2}}; \tag{10}$$

в частности при $p = 2$

$$\overline{\Delta_{dd}^2(r)} = c_2(x, t)(r\bar{\varepsilon})^{2/3}\left(\frac{L}{r}\right)^{-k}$$

т.е. формула (3).

Так как сохраняет силу указанная в [2] формула

$$B_{ddd}(r) = -\frac{4}{5}\bar{\varepsilon} r$$

то из (3) вытекает (4).

Возможно освободить наше изложение от специального выбора лежащей в основе рассмотрений А.М. Обухова величины $\varepsilon_r(x, t)$. Две гипотезы подобия формулируются тогда так :

Первая гипотеза подобия

Если

$$|x^{(k)} - x| \ll L, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

то условное распределение $3n$ величин

$$\frac{U_\alpha(x^{(k)}) - U_\alpha(x)}{U_\alpha(x^{(0)}) - U_\alpha(x)}, \qquad \alpha = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad (11)$$

зависит только от числа Рейнольдса

$$Re = \frac{|U(x^{(0)}) - U(x)|\,|x^{(0)} - x|}{\nu}$$

Вторая гипотеза подобия

При

$$Re \gg 1$$

указанные в первой гипотезе распределения не зависят от Re.

Существенное содержание дополнительных допущений А.М. Обухова может быть сформулировано так :

Третья гипотеза

Две группы величин (11) стохастически независимы, если в первой группе

$$|x^{(k)} - x| \geqslant r_1,$$

во второй

$$|x^{(k)} - x| \leqslant r_2$$

и $r_1 \gg r_2$.

Естественно, что при желании извлечь из третьей гипотезы строго математически нужную нам логарифмическую нормальность распределений разностей скоростей и формулу для дисперсий логарифмов этих разностей, аналогичную (1-2), необходимо уточнить формулировку этой гипотезы.

ЛИТЕРАТУРА

(1) КОЛМОГОРОВ А.Н. - ДАН АН СССР 30 (1941) стр. 299.

(2) КОЛМОГОРОВ А.Н. - ДАН АН СССР 31 (1941) стр. 147.

(3) КОЛМОГОРОВ А.Н. - ДАН АН СССР 32 (1941) стр. 19.

(4) ОБУХОВ А.М. - ДАН АН СССР 32 (1941) стр. 22.

(5) ОБУХОВ А.М. - Известия АН СССР, серия географическая и геофизическая (1941) стр. 453.
Немецкий перевод работ (1-5) можно найти в "Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz", Akademie-Verlag, Berlin, 1958.

PRINCIPES D'UNE THÉORIE NON PROBABILISTE DE LA TURBULENCE

J. BASS

Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique, Paris

SOMMAIRE

Tentative pour construire sans technique probabiliste des solutions turbulentes des équations de l'hydrodynamique pour un écoulement permanent en moyenne. Ces solutions sont des fonctions pseudo-aléatoires du temps, non représentables par des séries ou des intégrales de Fourier ordinaires. On connaît des solutions turbulentes du modèle non linéaire de BURGERS, et on en construit pour les équations de l'hydrodynamique avec potentiel des vitesses, le cas général des équations de Navier-Stokes n'étant pas encore résolu.

SUMMARY

An attempt is made in order to construct without probabilistic concepts turbulent solutions of the equations of hydrodynamics in the case of a flow permanent in mean. As functions of time, these solutions are pseudo-random functions, which cannot be represented by ordinary Fourier series or integrals. Turbulent solutions of the non linear model of BURGERS are known, and turbulent solutions of the equations of hydrodynamics are built in the case of a potential flow. The general case of Navier-Stokes equations is not yet solved.

Les théories habituelles de la turbulence sont essentiellement probabilistes.

Elles renoncent à expliquer la complication du mouvement turbulent, et se contentent d'affirmer que l'agitation turbulente est de nature statistique. Par ailleurs, il est généralement admis que le mouvement turbulent obéit aux équations de l'hydrodynamique, c'est-à-dire, dans les cas des fluides incompressibles, aux équations de Navier-Stokes. On sait qu'il est presque impossible à l'aide de ces deux bases de départ, de construire une théorie cohérente de la turbulence.

Les théories de la turbulence sont donc presque toujours semi-empiriques, des hypothèses extérieures de caractère physique servant à combler les lacunes de la théorie. Seule la théorie statistique de E. Hopf échappe, par sa nature même, à l'empirisme. Mais

elle est difficile à justifier, et délicate à employer, de sorte qu'elle n'a pas encore fourni de résultats positifs [1].

Pour « expliquer » la turbulence, on pourrait songer à exclure toute hypothèse statistique (ou plus exactement probabiliste), et à chercher si les équations de Navier-Stokes admettent des solutions turbulentes.

Un tel programme exige certains commentaires et se heurte à certaines difficultés. Il est d'abord bien clair que, dans une théorie non probabiliste de la turbulence, il ne peut cependant être question de supprimer toute hypothèse de nature statistique. Ce sont justement ces hypothèses qui serviront à définir ce qu'on appellera solutions « turbulentes ». Mais ces solutions seront des fonctions ordinaires, et non aléatoires, et on les calculera en premier lieu, pour en déduire les moyennes ou les distributions qui sembleront dignes d'intérêt.

D'autre part, une véritable théorie de la turbulence devra expliquer la naissance de la turbulence, c'est-à-dire le passage du mouvement laminaire au mouvement turbulent. Il s'agit là d'un problème difficile où les conditions aux limites et la vitesse moyenne jouent un rôle essentiel, et mal connu.

Le programme proposé n'a pas encore été entièrement rempli. On sait aujourd'hui définir une « fonction turbulente », et construire certaines solutions turbulentes des équations des fluides parfaits, le cas général des équations de Navier-Stokes présentant des difficultés analytiques qui ne sont pas résolues. On a quelques idées sur la nature de l'instabilité turbulente, mais bien entendu, le problème de la naissance de la turbulence ne sera pas élucidé tant qu'on n'aura pas résolu les équations de Navier-Stokes.

Je me limiterai au cas d'un mouvement « stationnaire en moyenne » (permanent) dans le temps. La vitesse d'ensemble est donc indépendante du temps. En chaque point, chaque composante u de la vitesse d'agitation est une fonction « compliquée » du temps t, définie pour $t > 0$, et qui possède certaines *moyennes temporelles* (c'est là, et là seulement, qu'intervient l'idée statistique) dont voici les propriétés :

a)
$$u = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, dt = 0$$

b)
$$\gamma(h) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot u(t+h)\, dt,$$

corrélation temporelle de la vitesse, est une fonction continue, positive pour $h = 0$, et qui tend vers 0 lorsque $h \to \infty$.

Il en résulte que u *ne peut pas*, comme fonction de t, être représentée par une série ou une intégrale de Fourier ordinaires. L'analyse harmonique classique est impraticable (bien entendu, l'analyse harmonique *aléatoire* serait valable, si l'on acceptait de représenter u par une fonction aléatoire. Mais c'est justement ce qu'on veut éviter) [2].

1. On peut noter que la théorie de E. Hopf n'est pas fondamentalement statistique. Si $\mathcal{L}$ est une fonctionnelle linéaire de la vitesse, définie dans un espace fonctionnel convenable, la fonctionnelle utilisée par E. Hopf est la moyenne de exp. $\mathcal{L}$. Mais la fonctionnelle non linéaire exp. $\mathcal{L}$ vérifie aussi bien une équation fonctionnelle intéressante, qui peut être considérée comme l'image fonctionnelle des équations de Navier-Stokes, et qui ne semble pas avoir encore été exploitée.

2. L'analyse harmonique « en moyenne quadratique » s'adapte aux fonctions non aléatoires, moyennant quelques précautions, mais elle ne donne pas de u une image suffisamment détaillée (note ajoutée à la correction des épreuves).

Construire des fonctions u, dites *fonctions pseudo-aléatoires*, satisfaisant aux conditions (a) et (b) n'est donc pas un problème classique. On doit d'ailleurs s'attendre à ce que ces fonctions ne soient pas très simples, puisqu'elles représentent localement la turbulence. J'utiliserai les résultats suivants :

1° Soit $P(t)$ un polynôme de degré $\nu \geqslant 2$, tel que $P(t) - P(0) - t P'(0)$ ait au moins un coefficient *irrationnel* (c'est l'arithmétique qui, mathématiquement, crée de la turbulence. Si tous les coefficients étaient rationnels, u serait une fonction périodique). Alors :

$$\sin 2\pi P(\widehat{t}) \quad \text{et} \quad \cos 2\pi P(\widehat{t}),$$

où $\widehat{t}$ désigne la *partie entière* de t, sont pseudo-aléatoires. Ces fonctions ont pour corrélation temporelle $\frac{1}{2}\gamma_0(h)$, où :

$$\gamma_0(h) = 1 - |h| \text{ si } |h| < 1.$$
$$= 0 \qquad \text{si } |h| > 1.$$

Ce sont des fonctions « en escalier », qui gardent une valeur constante dans chacun des intervalles successifs (0,1), (1,2), (2,3)... La distribution de ces valeurs, bien qu'elle soit prévisible, est très compliquée. Elle est d'ailleurs en un sens « instable », car elle est très sensible à des variations, même très faibles, des coefficients du polynôme P.

Si P est du premier degré ($\nu = 1$), $\sin 2\pi P(t)$ et $\cos 2\pi P(t)$ ne sont pas du type voulu. En somme, la construction de ces fonctions pseudo-aléatoires consiste à partir des fonctions sinusoïdales ordinaires $\sin 2\pi t$ et $\cos 2\pi t$, à y remplacer la fonction linéaire t par un polynôme de degré $\nu \geqslant 2$, et à « quantifier » le temps.

2° Si $f(t)$ est pseudo-aléatoire, sa convolution par une fonction $H(t)$ est pseudo-aléatoire : la fonction

$$u(t) = \int_0^t H(t-s)\, f(s)\, ds$$

est pseudo-aléatoire, et d'autant plus régulière que H l'est elle-même. On obtient ainsi des fonctions turbulentes continues, dérivables...

3° On peut construire des séries de fonctions pseudo-aléatoires analogues aux séries de Fourier moyennant des hypothèses très générales;

$$u(t) = \sum_k [A_k \cos 2\pi P(\widehat{\omega}_k t) + B_k \sin 2\pi P(\widehat{\omega}_k t)]$$

est une fonction pseudo-aléatoire.

On notera enfin qu'une fonction pseudo-aléatoire réelle est nécessairement très compliquée. Elle oscille indéfiniment sans tendre vers aucune limite, s'annule une infinité de fois et, change une infinité de fois de signe. En cela, elle ressemble aux fonctions qu'on peut représenter par des séries de Fourier de la forme :

$$\sum [A_k \cos 2\pi \omega_k t + B_k \sin 2\pi \omega_k t]$$

Mais ces dernières fonctions ne conviennent pas pour la turbulence. Elles sont trop proches de fonctions périodiques et leurs corrélations temporelles n'ont pas la forme voulue.

Il n'est pas très difficile d'examiner si une équation aux dérivées partielles *linéaire* admet des solutions qui, en un point donné, soient fonctions pseudo-aléatoires du temps. Dans le cas d'une équation non linéaire, le problème est moins simple, car les propriétés de multiplication des fonctions pseudo-aléatoires sont moins naturelles que celles des fonctions circulaires ordinaires. On sait démontrer que l'équation de M. Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

modèle unidimensionnel de turbulence, possède bien des solutions pseudo-aléatoires. Le cas réel des équations de Navier-Stokes n'est pas encore résolu. Mais on sait trouver certaines solutions pseudo-aléatoires des *équations des fluides parfaits*. Ces solutions dérivent d'un *potentiel des vitesses* g. Si donc elles sont « turbulentes », elles correspondent à un mouvement turbulent d'un type assez inhabituel. Même s'il est difficile d'expliquer la naissance et la stabilité d'un tel mouvement, il semble intéressant d'en constater l'existence.

Si p désigne le rapport de la pression à la densité, p est relié au potentiel des vitesses g par la relation :

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)^2 + p = 0$$

et g est une fonction harmonique :

$$\Delta g = 0$$

On se donne une fonction pseudo-aléatoire du type $\sin 2\pi \mathrm{P}(t)$, qui jouera un rôle analogue à la fonction $\sin 2\pi t$, en analyse harmonique classique. On lui associe la série (limitée ou infinie) :

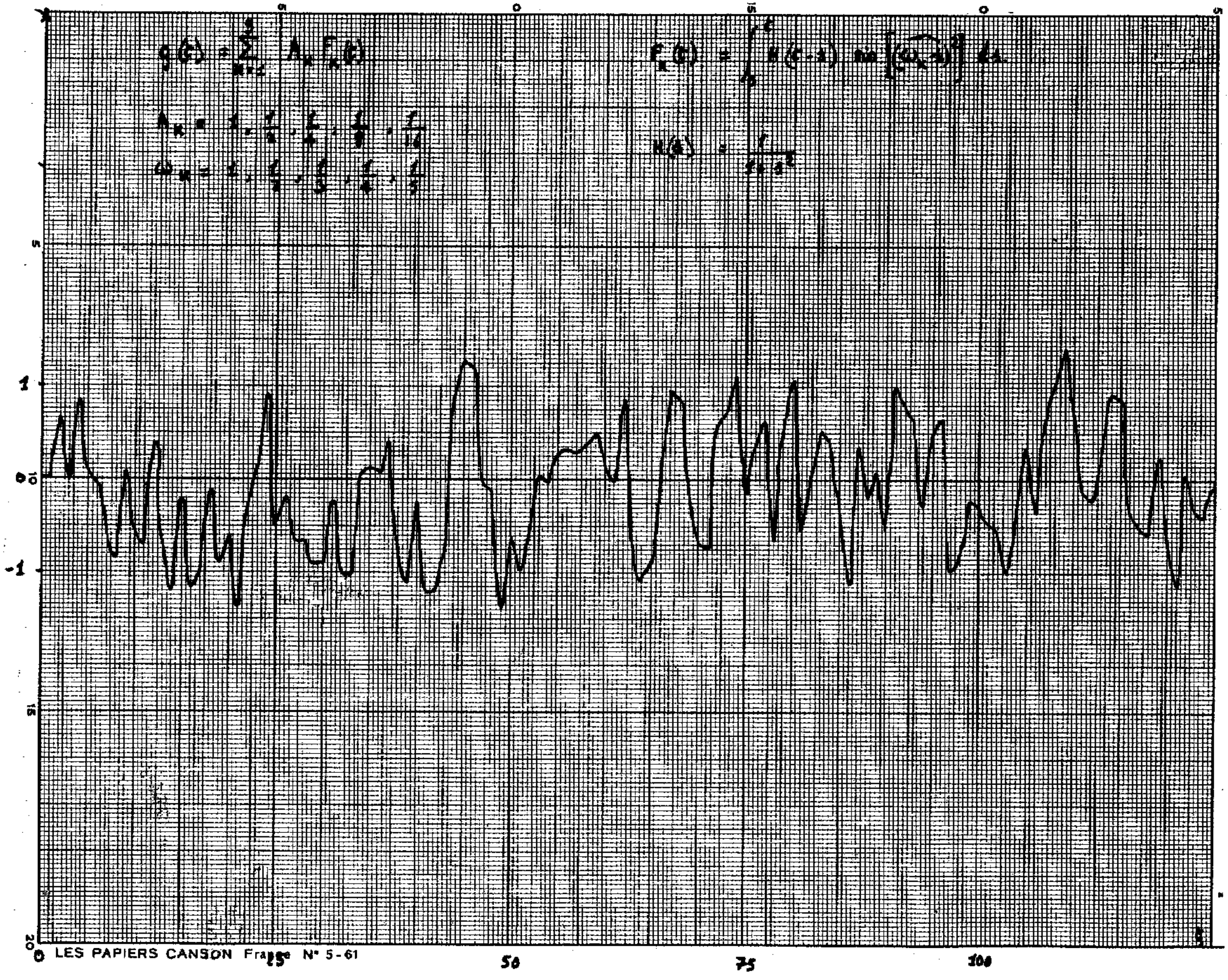
$$f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}_k(x) \sin 2\pi \mathrm{P}(\omega_k t),$$

où les coefficients $\mathrm{A}_k(x)$ sont des *fonctions harmoniques* du point x_1, x_2, x_3 dans l'espace à trois dimensions. On régularise enfin $f(t, x)$ par convolution, et l'on pose :

$$g(t, x) = \int_0^t f(t - s, x)\, \mathrm{H}(s)\, ds.$$

où $\mathrm{H}(s)$ est continue. Alors $g(t, x)$ est un potentiel des vitesses acceptable qui, en tout point x fixé, a les propriétés temporelles voulues pour représenter une agitation turbulente.

Les corrélations temporelles ont d'avance la forme des corrélations expérimentales. En ce qui concerne les corrélations d'espace, qui sont d'ailleurs aussi, conformément à la technique expérimentale, des moyennes temporelles, leur structure n'est pas fixée d'avance. Elle dépend du choix des fonctions $\mathrm{A}_k(x)$, qui est lui-même relié, d'une façon qui n'a pas encore été bien éclaircie, aux conditions initiales et aux limites du mouvement. Si les $\mathrm{A}_k(x)$ tendent vers 0 lorsque le point x s'éloigne à l'infini, les corrélations spatiales tendent vers 0 lorsque la distance des deux points augmente. On peut donc choisir des fonctions $\mathrm{A}_k(x)$ telles que l'ensemble des corrélations spatiales et temporelles du vecteur vitesse soit en bon accord avec les mesures expérimentales.


$g(t) = \sum_{k=1}^{5} A_k F_k(t)$
$A_k = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$
$\omega_k = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$
$F_k(t) = \int_0^t h(t-s) \sin[(\omega_k s)^2] \, ds$
$h(s) = \frac{1}{1+s^2}$
1
0
-1
25
50
75
100
LES PAPIERS CANSON France N° 5-61

A titre d'exemple, on a calculé numériquement et représenté graphiquement la fonction g, en un point déterminé, avec les données suivantes :

a)
$$H(s) = \frac{1}{1+s^2};$$

b) k prend 5 valeurs succesives, avec

$$\omega_1 = 1,\ \omega_2 = \frac{1}{2},\ \omega_3 = \frac{1}{3},\ \omega_4 = \frac{1}{4},\ \omega_5 = \frac{1}{5}$$

c) Au point x considéré :

$$A_1 = 1,\ A_2 = \frac{1}{2},\ A_3 = \frac{1}{4},\ A_4 = \frac{1}{8},\ A_5 = \frac{1}{16}$$

On a choisi le millimètre comme unité de base. La courbe calculée est la superposition de 5 courbes d'aspect irrégulier, dont les amplitudes sont de plus en plus petites. La première courbe fournit l'aspect général des oscillations. Les autres modifient et compliquent la structure locale. Le calcul numérique a été fait point par point, millimètre par millimètre. Cependant l'irrégularité locale est un peu atténuée et n'apparaît pas dans tous ses détails. On peut naturellement interpréter la fonction g aussi bien comme une composante de la vitesse que comme un potentiel des vitesses. Il suffit de considérer les coefficients A_k comme les valeurs numériques, au point x fixé, des dérivées des coefficients de g, et non plus comme les valeurs de ces coefficients.

REFERENCES

Bass, J. (1958). Contribution à l'étude de certaines fonctions susceptibles de représenter la vitesse d'un fluide turbulent. *S. Math. pures et appliquées*, **37**, p. 1217.

Bass, J. (1959). Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires. *Bull. soc. Math. de France*, **87**, p. 1 à 64.

Bass, J. (1961). Sur l'existence des solutions turbulentes des équations de l'hydrodynamique. *C.R. Ac. Sc.*, **252**, p. 3392.

Bass, J. *Les fonctions pseudo-aléatoires et leurs applications* (mémorial des Sciences mathématiques, à paraître en 1962).

INTERVENTIONS

E.A. Brun. — Tout le monde est d'accord pour reconnaître que, quel que soit le mode de représentation adopté pour la comparaison des résultats expérimentaux, la dispersion des points obtenus au cours d'un travail, avec un dispositif bien déterminé, est beaucoup plus faible que l'écart entre les résultats fournis par deux expérimentations différentes. Il y a plusieurs raisons qui peuvent expliquer les discordances, mais le problème est d'essayer, dans chaque cas, de trouver la ou les raisons. Et celà ne pourrait se faire que si, dans les mémoires, les auteurs prenaient soin, d'une part de bien préciser les conditions expérimentales et, d'autre part, de donner des résultats expérimentaux bruts sous forme de tableaux avant de les transformer en grandeurs sans dimensions.

Par exemple, au laboratoire d'Aérothermique du C.N.R.S. nous avons repris récemment la mesure de la convection forcée sur une plaque rugueuse, en incompressible. Faute de documents exploitables, nous avons dû reprendre toute l'étude dynamique de telles plaques et, pour comparer nos résultats avec ceux obtenus ailleurs, nous avons utilisé la représentation donnant $\frac{u_\infty - u}{u_\tau}$ en fonction de $\frac{y}{\delta_1}\sqrt{\frac{c_p}{2}}$. Quel que soit le nombre de Reynolds, nos points se placent avec une excellente approximation sur une même courbe. Mais notre

courbe n'est pas tout à fait celle obtenue par CLAUSER, ni celle obtenue par d'autres. Il aurait été extrêmement instructif de savoir si ces divergences, faibles mais certaines, sont dûes, à des méthodes de mesures différentes, à un choix différent de l'origine des y, à un procédé de calcul différent de la tension pariétale τ, à des conditions différentes de l'écoulement, etc. Si dans les mémoires nous avions trouvé un assez grand nombre de détails, il nous aurait été loisible de nous placer dans des conditions aussi identiques que possible de celles utilisées par tel auteur pour tacher d'atteindre les raisons des écarts. Et même, en présence de bonnes mesures dynamiques effectuées avec un dispositif très connu, nous aurions pu entreprendre directement les mesures thermiques sans perdre une année à refaire des expériences déjà effectuées par d'excellents auteurs.

Cependant, on objectera le grand nombre de pages à lire et la nécessité de réduire le nombre et la longueur des mémoires. Aussi proposerai-je, pour ne pas alourdir la bibliographie, qu'un mémoire de caractère expérimental puisse comporter une annexe qui pourrait ne pas figurer sur la publication mais qui serait à la disposition des quelques auteurs qui font des mesures sur le même sujet. Cette annexe pourrait n'être pas imprimée mais simplement dactylographiée d'une façon telle que sa reproduction soit aisée.

P. VERNOTTE. — J'appuie pleinement les observations de M. BRUN, et je vais même un peu plus loin.

Depuis plus de 25 ans, je combats énergiquement les abus dans l'emploi des nombres sans dimension.

En fait, ces nombres sont adaptés à la présentation des résultats d'expérience obtenus dans des conditions complètement comparables.

Or, les résultats d'une mesure dépendent de bien autre chose que les paramètres nondimensionnels traditionnels : par exemple, facteurs de forme, nature du champ de vitesse ou du champ de température, variation thermique des propriétés physiques, ... Si l'on veut raccorder ce qui n'est pas complètement comparable, il faut mutiler les résultats expérimentaux, d'une manière que l'on cherche évidemment à rendre aussi raisonnable que possible, mais qui risque d'être arbitraire.

Je propose donc que le document expérimental rapporte avant tout les résultats directs des mesures telles qu'elles ont été faites.

COMMENTAIRE DE LA SECTION

NOUVELLES CONCEPTIONS ET CONTRIBUTIONS RÉCENTES

Prof. J. KAMPÉ DE FÉRIET, Président

Permettez-moi tout d'abord de m'excuser d'avoir si mal rempli le rôle qui m'a été confié : ne pouvant ni lire ni écrire pendant les mois qui ont précédé le Colloque, c'est à l'aide amicale du Professeur KOVASZNAY, qui a bien voulu accepter la Présidence effective de la Section VII, qu'a incombé tout le travail d'organisation : qu'il veuille bien trouver ici l'expression de mon amicale reconnaissance.

N'ayant pu préparer le Rapport d'ensemble que l'on attendait de moi au début de la séance du vendredi 1er septembre, j'ai dû, tant bien que mal, exprimer par un mauvais croquis quelques-unes des réflexions que j'ai pu faire pendant ma longue inaction.

D'un côté, sur un pic couvert de neiges éternelles, flotte dans la solitude et le silence, l'étendard des équations de Navier; un abîme insondable sépare ce sommet glacé du terrain sur lequel se déverse la pluie incessante des résultats de l'expérience. C'est sur ce sol, parfois un peu marécageux, à cause de l'abondance des pluies, que tentent de s'élaborer les modèles mathématiques, suggérés bien souvent par des intuitions physiques profondes : je pense au travail des années 1930, les années d'or de l'étude de la Turbulence, illuminées par les intuitions de Sir Geoffrey TAYLOR et de Th. von KARMAN; mais n'est-il pas prématuré de qualifier ces modèles de théories de la turbulence ?

Un seul pont est tendu au-dessus de l'abîme, pour relier les modèles proposés aux équations de Navier, qui — jusqu'à preuve du contraire, — doivent rester la base de la Mécaniques des Fluides; — ce pont est constitué par les équations de Reynolds. Heureusement qu'il a pu être établi que, au moins pour une définition judicieuse de la moyenne, les équations de Reynolds sont bien une conséquence logique des équations de Navier — de telle sorte qu'en satisfaisant aux équations de Reynolds, on est certain de satisfaire au moins une des conséquences des équations de Navier.

Mais il n'en résulte nullement que les hypothèses empiriques que l'on adjoint aux équations de Reynolds ne soient pas, elles, contradictoires avec les équations de Navier.

Par exemple existe-t-il des intégrales des équations de Navier explosant successivement en des points répartis au hasard dans le fluide, comme le montrent les expériences de EMMONS et les beaux travaux de SCHUBAUER et de KLEBANOFF ?

Existe-t-il des intégrales des équations de Navier présentant le caractère d'extrême complication que postulent les modèles statistiques ?

On a pu prouver qu'il existe des intégrales non analytiques par rapport au temps; mais les intégrales régulières sont-elles toujours analytiques par rapport aux variables d'espace ?

Existe-t-il des ensembles d'intégrales des équations de Navier auxquels s'applique le principe ergodique ?

On a pu prouver récemment que les moyennes spatiales dans certains champs de vitesse turbulents étaient bien égales aux moyennes statistiques; mais, sans que cela soit certain, il semble peu probable que le principe ergodique s'applique aux moyennes temporelles.

Le manque d'une base théorique, large et solide, garantissant l'absence de toute contradiction logique avec les équations générales de la Mécanique des Fluides, ne donne-t-il pas une allure un peu fragile aux modèles semi-empiriques qu'on nous propose chaque jour ?

Si nous avions l'humilité d'avouer que, — bien loin d'être parvenus aux solutions définitives — nous commençons seulement à aborder les vrais problèmes, peut-être réussirions-nous mieux à attirer vers nous l'attention des jeunes mathématiciens : l'étude approfondie des intégrales des équations de Navier leur offrirait un champ presque vierge; les moissons qu'ils y récolteraient seraient, à coup sûr, l'objet d'un magnifique renouveau dans l'étude de la Turbulence.

L'un des premiers fruits de ce renouveau serait de permettre de trancher le problème fondamental de la validité des équations de Navier pour représenter les mouvements turbulents des fluides; cette décision est impossible aujourd'hui à cause des hypothèses empiriques qui s'interposent entre les équations de Navier et les résultats comparables directement avec les expériences; en cas de désaccord on est plutôt tenté de donner un nouveau coup de pouce aux hypothèses empiriques que de conclure à l'invalidité des équations de Navier.

Admettant, comme on le fait depuis Barré de St. Venant, que le tenseur des efforts ne dépend que du tenseur des vitesses de déformation au même instant, on pourrait légitimement utiliser une loi fondamentale beaucoup plus générale que celle de Navier : ce sont peut être précisément les termes d'ordre supérieur, négligés par Navier, qui ont une importance prépondérante dans les écoulements turbulents.

Cette recherche passionnante n'aura de sens que lorsque l'étude mathématique des intégrales des équations de Navier aura fait de très substantiels progrès.

Cette Section a justement eu la rare bonne fortune d'entendre une communication d'un des plus grands mathématiciens de notre temps; le Professeur Andrei Kolmogorov a bien voulu nous exposer le progrès de ses nouvelles recherches sur la théorie de l'isotropie locale, qu'il a formulée en 1941 pour la première fois. Il a prouvé en particulier que la dissipation d'énergie ε par unité de volume tend, lorsque l'échelle locale devient très petite, vers une variable aléatoire telle que $\log \varepsilon$ suive la loi normale.

Le fait que l'un des fondateurs du Calcul des Probabilités moderne marque, depuis 20 ans, son intérêt pour la Théorie de la Turbulence, en y consacrant une partie de ses recherches personnelles, nous permet d'envisager avec optimisme les développements futurs que nous attendons et que nous espérons.

Une communication du Professeur Obukhoff a montré que, dans l'étude de la diffusion, on obtenait des résultats plus simples en basant la description statistique sur le champ des vitesses.

La communication du Professeur Bass, appliquant ses méthodes nouvelles de construction de fonctions « compliquées », fournit l'exemple d'un potentiel des vitesses harmonique par rapport aux variables d'espace et pseudo-aléatoire par rapport au temps : il ne s'agit-là que d'un premier essai, mais qui permet d'attendre d'importants résultats.

MM. Favre, Gaviglio et Dumas, par leur méthode de mesure des corrélations spatio-temporelles doubles, démontrent expérimentalement l'existence d'un temps compensateur égal au temps mis par le mouvement moyen pour parcourir la distance des deux points : ils commencent à aborder la même étude pour les corrélations triples.

Enfin J. Kestin a résumé dans un rapport très dense, mais clair et précis, nos connaissances actuelles sur le transport de chaleur à travers la couche limite turbulente et incompressible.